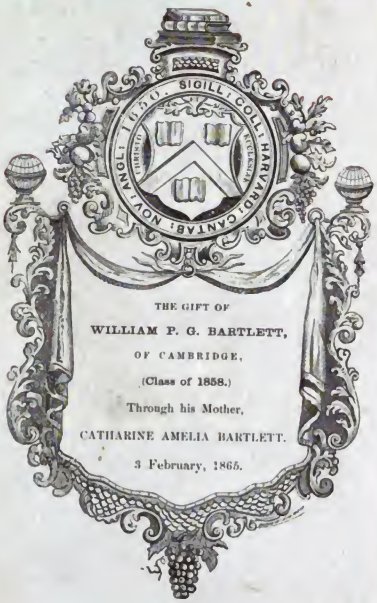
WIDENER LIBRARY
HX DCVA U

Digitized by Google

32b.81.

Asa 3088.57




THE GIFT OF
WILLIAM P. G. BARTLETT,
OF CAMBRIDGE,
(Class of 1858.)
Through his Mother,
CATHARINE AMELIA BARTLETT.
3 February, 1865.

Digitized by

Digitized by Google

Wm P. G. Bartlett.
Cambridge

Digitized by Google

Digitized by Google

P. A. HANSEN,
MITGLIED DER KÖNIGL. SÄCHS. GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

# AUSEINANDERSETZUNG

## EINER ZWECKMÄSSIGEN METHODE

ZUR

# BERECHNUNG DER ABSOLUTEN STÖRUNGEN

DER

# KLEINEN PLANETEN.

---

**DRITTE ABHANDLUNG.**

---

Aus den Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe der Königlich Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften.

---

LEIPZIG
BEI S. HIRZEL.
1859.

# ABHANDLUNGEN

DER

# KÖNIGL. SÄCHSISCHEN GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN

ZU LEIPZIG.

---

**ERSTER BAND:** Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Erster Band. Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1852. broch. Preis 4 Thlr. 16 Ngr.

Inhalt:


A. F. MÖBIUS, über die Grundformen der Linien der dritten Ordnung. 24 Ngr.

P. A. HANSEN, allgemeine Auflösung eines beliebigen Systems von linearischen Gleichungen. — Ueber die Entwickelung der Grösse $(1-2\alpha H+\alpha^2)^{-\frac{1}{2}}$ nach den Potenzen von $\alpha$. 12 Ngr.

A. SEEBECK, über die Querschwingungen elastischer Stäbe. 10 Ngr.

C. F. NAUMANN, über die cyclocentrische Conchospirale und über das Windungsgesetz von Planorbis Corneus. 10 Ngr.

W. WEBER, elektrodynamische Maassbestimmungen (Widerstandsmessungen). 1 Thlr.

F. REICH, neue Versuche mit der Drehwage. 20 Ngr.

M. W. DROBISCH, Zusätze zum florentiner Problem. 16 Ngr.

W. WEBER, elektrodyuamische Maassbestimmungen (Diamagnetismus.) 20 Ngr.


**ZWEITER BAND:** Abhandlungen der philologisch-historischen Classe. Erster Band. Mit einer Karte. hoch 4. 1850. broch. Preis 6 Thlr.

Inhalt:


A. WESTERMANN, Untersuchungen über die in die attischen Redner eingelegten Urkunden. 2 Abhandlungen. 1 Thlr.

F. A. UKERT, über Dämonen, Heroen und Genien. 24 Ngr.

TH. MOMMSEN, über das römische Münzwesen. 1 Thlr. 20 Ngr.

E. v. WIETERSHEIM, der Feldzug des Germanicus an der Weser. 1 Thlr.

G. HARTENSTEIN, Darstellung der Rechtsphilosophie des Hugo Grotius. 20 Ngr.

TH. MOMMSEN, über den Chronographen vom Jahre 354. Mit einem Anhange über die Quellen der Chronik des Hieronymus. 1 Thlr. 10 Ngr.


**DRITTER BAND:** Abhandlungen der philologisch-historischen Classe. Zweiter Band. Mit 3 Tafeln. hoch 4. 1857. broch. Preis 7 Thlr. 10 Ngr.

Inhalt:


W. ROSCHER, zur Geschichte der Englischen Volkswirthschaftslehre im sechzehnten und siebzehnten Jahrhundert. 1851. 1 Thlr.

———— Nachträge. 1852. 8 Ngr.

J. G. DROYSEN, Eberhard Windeck. 1853. 24 Ngr.

TH. MOMMSEN, Polemii Silvii laterculus. 1853. 16 Ngr.

———— Volusii Maeciani distributio partium. 1853. 6 Ngr.

J. G. DROYSEN, zwei Verzeichnisse, Kaiser Karls V. Lande, seine und seiner Grossen Einkünfte und anderes betreffend. 1854. 20 Ngr.

TH. MOMMSEN, die Stadtrechte der latinischen Gemeinden Salpensa und Malaca in der Provinz Baetica. 1855. 1 Thlr.

———— Nachträge. 1855. 16 Ngr.

FRIEDRICH ZARNCKE, Die urkundlichen Quellen zur Geschichte der Universität Leipzig in den ersten 150 Jahren ihres Bestehens. 1857. 3 Thlr.


**VIERTER BAND:** Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Zweiter Band. Mit 19 Tafeln. hoch 4. 1855. br. Preis 6 Thlr. 20 Ngr.

Inhalt:


M. W. DROBISCH, über musikalische Tonbestimmung und Temperatur. 1852. 1 Thlr.

W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. Mit 18 Tafeln. 1852. 1 Thlr. 10 Ngr.

P. A. HANSEN, Entwickelung des Products einer Potenz des Radius Vectors mit dem Sinus oder Cosinus eines Vielfachen der wahren Anomalie in Reihen, die nach den Sinussen oder Cosinussen der Vielfachen der wahren, excentrischen oder mittleren Anomalie fortschreiten. 1853. 1 Thlr.

———— Entwickelung der negativen und ungraden Potenzen der Quadratwurzel der Function $r^2 + r'^2 - 2rr'(\cos U \cos U' + \sin U \sin U' \cos J)$. 1854. 1 Thlr.

# AUSEINANDERSETZUNG

## EINER ZWECKMÄSSIGEN METHODE

ZUR

# BERECHNUNG DER ABSOLUTEN STÖRUNGEN

DER

# KLEINEN PLANETEN.

VON

P. A. HANSEN.

---

DRITTE ABHANDLUNG



Digitized by Google

Asia 3088.57

Digitized by Google

In dieser Abhandlung, mit welcher ich vorläufig das Thema zu schliessen gedenke, entwickele ich die Ausdrücke für die Berechnung der Störungen, die von den Quadraten und Producten der störenden Kräfte abhängen, und wende sie auf die Egeria an. Es erscheinen somit hier zum ersten Male die Störungen zweiter Ordnung eines der kleinen Planeten.

Ich habe schon früher bemerkt, dass die Egeria in Bezug auf die Grösse der Störungen, welche sie erleidet, zur Mittelgattung der kleinen Planeten, wenn ich mich so ausdrücken darf, gehört, es giebt nemlich unter diesen Planeten eine Anzahl, deren Störungen geringer sind wie die der Egeria, aber es giebt auch eine Anzahl, deren Störungen grösser ausfallen müssen. Aus dem in dieser Abhandlung erhaltenen Endresultat sieht man, dass die meisten Glieder zweiter Ordnung klein sind, dass aber darunter einige sich befinden, die nicht unbeträchtlich sind, und deren Uebergehung den berechneten Ort der Egeria in nicht sehr langer Zeit merklich unrichtig machen würde. Diese Glieder sind erstlich die Säcularänderungen, d. i. die mit $t \sin \varepsilon$ und $t \cos \varepsilon$ multiplicirten Glieder, deren vom Quadrat der störenden Kraft abhängiger Theil in der Länge

$$-0'',48916\, t \sin \varepsilon - 0'',76801\, t \cos \varepsilon$$

und im Radius nahe die Hälfte davon beträgt. Da die Einheit von $t$ hier das Julianische Jahr ist, so würde die Weglassung dieser Glieder jährlich nahe Eine Secunde Einwirkung im Maximum erreichen. Zweitens haben durch die Berücksichtigung des Quadrats der störenden Kraft die Glieder, die den kleinsten Divisor bekommen, einen nicht unwesentlichen Zuwachs erhalten, nemlich



Digitized by Google

$$\begin{aligned}
&\{-40'',50-0'',01829t\}\sin\{(1-3\mu)\varepsilon-3(c'-\mu c)\}\\
+&\{-31,37-0.57249t\}\cos\{(1-3\mu)\varepsilon-3(c'-\mu c)\}\\
+&\{\ \ 19.66+0.01627t\}\sin\{(2-3\mu)\varepsilon-3(c'-\mu c)\}\\
+&\{\ \ 25,37+0.06468t\}\cos\{(2-3\mu)\varepsilon-3(c'-\mu c)\}.
\end{aligned}$$

Der Coefficient des ersten dieser Argumente hat also einen Zuwachs von ohngefähr einer Minute bekommen, und die jährliche Aenderung desselben übersteigt eine halbe Secunde; der Zuwachs des Coefficienten des zweiten Arguments beträgt ohngefähr eine halbe Minute.

Es scheint im Ganzen aus diesen Untersuchungen hervor zu gehen, dass es unter den kleinen Planeten nur sehr wenige giebt, für welche man das Quadrat der störenden Kraft ganz übergehen kann, wenn man ein nicht allzu ungenaues Resultat erhalten will, allein es wird unter denselben auch nur wenige geben, für welche es absolut nothwendig wird, die Glieder zweiter Ordnung mit möglichster Ausführlichkeit zu berechnen. Für diejenigen der kleinen Planeten, die dem Jupiter am Nächsten kommen können, werden wohl auch einige der vom Cubus der störenden Kraft abhängige Glieder merkliche Werthe bekommen, man wird die Argumente, welchen diese Glieder angehören, leicht erkennen können, und nach den Grundsätzen, die in diesen Abhandlungen überhaupt massgebend sind, wenigstens die grösseren Theile derselben ohne grosse Mühe erhalten können.

Man wird in dieser Abhandlung finden, dass ich bei der Berechnung der Störungen zweiter Ordnung der Egeria in den rein periodischen Gliedern allgemein die dritte Decimale der Secunde berücksichtigt habe, bei den Gliedern, welche die kleinsten Divisoren erhalten, habe ich die Berechnung der Coefficienten, vor den Integrationen, bis auf die fünfte, bez. die vierte Decimale der Secunde, und bei den Gliedern die mit der Zeit selbst multiplicirt sind bis zur fünften Decimale einschliesslich durchgeführt.

Das Volumen Papiers, welches zur Berechnung der Störungen zweiter Ordnung der Egeria gedient hat, ist sehr wenig grösser wie das Volumen, welches zur Berechnung der Störungen erster Ordnung verwandt worden ist, und ich bin geneigt hieraus den Schluss zu ziehen, dass die Berechnung der Störungen zweiter Ordnung nicht viel mehr Zeit erfordert habe, wie die der ersten Ordnung. Einen anderen Massstab für die Angabe des Verhältnisses dieser beiden Zeiträume habe ich nicht, da die Berechnung der Störungen zweiter

Digitized by Google

Ordnung der Egeria, die ich schon vor mehreren Jahren angefangen habe, oftmals durch andere Arbeiten unterbrochen worden ist, und ich die Anzahl der Tage, die ich in jedem Abschnitt darauf verwandt habe, unterlassen habe anzumerken.

Ich halte nicht für nothwendig, dass man für jeden der kleinen Planeten die Störungen zweiter Ordnung mit solcher Ausführlichkeit berechnen müsse, wie hier aus dem Grunde geschehen ist, weil ich das erste Beispiel dieser Rechnung aufstelle, aber jedenfalls muss die Abkürzung, die man anwendet, so beschaffen sein, dass dadurch nicht merkliche Glieder verloren gehen. Ein einfaches Mittel diese Bedingung nicht zu verletzen, und dennoch auf eine weit kürzere Rechnung zu kommen, besteht darin, dass man die ganze Rechnung auf eine kleinere Anzahl von Decimalen der Secunde ausdehnt, wie in dieser Abhandlung geschehen ist. Wenn man allenthalben nur Eine Decimale weniger ansetzt wie hier, so kürzt sich die ganze Rechnung schon bedeutend ab, und würde man sich mit zwei Decimalen weniger begnügen wollen, so würde die Rechnung sehr kurz ausfallen.

Diese Abhandlung ist in folgende Abschnitte eingetheilt:

§. 1. Allgemeine Betrachtungen über das hier entwickelte Verfahren. Art. 1—6.

§. 2. Ableitung eines Ausdrucks zur Berechnung der von den Quadraten und den höheren Potenzen der störenden Kräfte abhängigen Glieder der Ungleichheiten sehr langer Periode. Art. 7—9. p. 94

§. 3. Analytische Entwickelung der Hauptbedingungsgleichung für die von den Quadraten der störenden Kräfte abhängigen Glieder.

Beweis zweier Sätze, die bei der Berechnung der von den Quadraten der störenden Kräfte abhängigen Glieder angewandt werden. Art. 10—33. p. 98

§. 4. Entwickelung der Hülfsgrössen für die Berechnung der vom Quadrat der störenden Masse abhängigen Glieder, nebst Anwendung auf die Egeria. Art. 34—48. p. 132

§. 5. Berechnung der für die vom Quadrat der störenden Masse abhängigen Glieder erforderlichen Producte. Art. 49—60. p. 160

§. 6. Integration der im vorigen § berechneten Glieder. Art. 61—81. p. 195

§. 7. Berechnung der von den Producten der störenden Massen abhängigen Glieder

Digitized by Google

Bestimmung der numerischen Werthe der willkührlichen Constanten der zweiten Annäherung. Art. 82—94. p. 231

§. 8. Verwandlung der elliptischen Elemente. Art. 95—109. p. 254

§. 9. Entwickelung der Ausdrücke für die Verbesserungen der Störungscoefficienten, die aus der Verbesserung der der Rechnung zu Grunde gelegten osculirenden Elemente entstehen.

Anwendung auf die im Vorhergehenden berechneten Störungen. Art. 110—132. p. 272

§. 10. Verwandlung der von osculirenden Elementen abhängigen Störungen in solche die von den mittleren Elementen abhängen.

Bestimmung der mittleren Elemente. Art. 133—150. p. 308

## §. 1. Allgemeine Betrachtungen über das hier entwickelte Verfahren.

1.

Das Verfahren, welches ich zur Berechnung der Störungen angegeben und in diesen Abhandlungen mit besonderer Rücksicht auf die kleinen Planeten entwickele, ist eine Methode der Veränderung der willkührlichen Constanten, und die Methode der Veränderung der willkührlichen Constanten überhaupt ist nach dem Urtheil unserer grössten Mathematiker zur Berechnung der Störungen die geeigneteste. Der Grund hievon ist leicht zu erkennen, er liegt darin, dass in dieser Methode die Integrationen auf die möglichst einfachen zurück geführt werden, während in den auf Differentialgleichungen von Coordinaten beruhenden Methoden die Integrationen gehäuft sind, oder, mit anderen Worten, auf eine zusammengesetztere Art eintreten. Die Folge dieser Häufung der Integrationen tritt in den Anwendungen namentlich in den Gliedern, die kleine Divisoren erhalten, nachtheilig hervor, und verursacht dass man in den Differentialen einen grösseren Theil der Coefficienten mit mehr Decimalen berechnen muss wie in der Anwendung der Methode der Veränderung der willkührlichen Constanten, wenn man im Resultat dieselbe Genauigkeit erlangen will. Ein anderer Uebelstand der auf Differentialgleichungen von Coordinaten gegründeten Verfahren besteht darin, dass man auf Aggregate von schwächer convergirenden Reihen geführt wird.

Mein Verfahren unterscheidet sich von der gewöhnlichen Methode

Digitized by Google

der Veränderung der willkührlichen Constanten dadurch, dass ich die Anzahl der Veränderlichen auf die möglichst geringe zurück geführt, und den Uebergang zu den Coordinaten, welcher schliesslich bei jedem Verfahren bewirkt werden muss, auf die einfachste Weise ausgeführt habe. Durch die Wahl der Coordinaten habe ich bewirkt, dass nur in Einer derselben die Glieder vorkommen, die eine doppelte Integration erfordern, und da hieraus vorzugsweise die grossen Ungleichheiten erstehen, so sind diese auch nur in der einen Coordinate enthalten; es sind daher die Störungen überhaupt, so viel es möglich ist, auf diese Eine Coordinate, die mittlere Länge oder mittlere Anomalie, zurück gedrängt. Es ist noch anzuführen, dass in meiner Methode durch die Wahl der Coordinaten und der unabhängigen Veränderlichen die unendlichen Reihen durch welche die Störungen ausgedrückt werden auf eine weit grössere Convergenz gebracht worden sind, wie in irgend einer anderen der bis jetzt bekannten Methoden.

2.

Der Ausdruck der Länge hängt ursprünglich von vier elliptischen Elementen ab, nemlich von der mittleren Länge zur Zeitepoche, der grossen Achse, der Excentricität und der Länge des Perihels, und der Radius Vector von drei, nemlich von der grossen Achse, der Excentricität und der Länge des Perihels. In dem hier erklärten Verfahren kann $W_0$, von welcher Function die Längenstörungen abhängen, auf folgende Form gebracht werden,

$$W_0 = \Xi + \Upsilon(\cos\eta + \tfrac{1}{2}e) + \Psi\sin\eta$$

und hängt also nur von den drei Elementen $\Xi$, $\Upsilon$ und $\Psi$ ab. Die Störungen des Radius hängen von dem Differential von $W_0$ nach $\eta$ ab, und da

$$\left(\frac{dW_0}{d\eta}\right) = -\Upsilon\sin\eta + \Psi\cos\eta$$

ist, so hängen diese Störungen hier nur von den zwei Elementen $\Upsilon$ und $\Psi$ ab. Für die Störungen der Breite haben wir hier den Ausdruck

$$R_0 = P\sin\eta - Q(\cos\eta - e)$$

und diese Störungen hängen also hier von zwei Elementen ab, wie in den anderen Methoden. Aber man erkennt hieraus, dass bei diesem Verfahren nur fünf Elemente im Ganzen vorkommen, während die Gesammtheit der Störungen ursprünglich von sechs elliptischen Elementen

Digitized by Google

abhängt, dass folglich in diesem Verfahren Ein Element eliminirt ist. Ausserdem ist in den Ausdrücken dieser Elemente eine Veränderliche eliminirt, denn die Ausdrücke der Artt. (43) (I) und (48) (I) für $d\delta W_0$ und $d\delta R_0$ zeigen, dass diese Grössen nur von acht Veränderlichen abhängen, während die Veränderungen der elliptischen Elemente ursprünglich von neun Veränderlichen abhängen, nemlich entweder von den drei Coordinaten und den drei Componenten der Geschwindigkeit des gestörten, und den drei Coordinaten des störenden Planeten, oder von den sechs elliptischen Elementen des gestörten, und den drei Coordinaten des störenden Planeten.

Der Uebergang von den gestörten Elementen zu den Coordinaten wird hier auf die einfachste Art bewirkt. In der ersten Annäherung bekommt man durch blose Addition der drei zu jedem Argument gehörigen Glieder von $W_0$ schon das Differential der Längenstörungen in Bezug auf die Zeit, und in der zweiten Annäherung erhält man dasselbe durch die Addition der je drei bez. Glieder von $\delta W_0$ und die Hinzufügung der beiden Glieder

$$\left(\frac{dW_0}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r} + \nu^2$$

Das Differential der Störungen des Radius ergiebt sich in der ersten Annäherung durch die Addition der zwei zu jedem Argument gehörigen Glieder des Differentials von $W_0$ nach $\eta$, und in der zweiten Annäherung durch die Addition der zwei analogen Glieder vom Differential von $\delta W_0$ und durch Hinzufügung der beiden Glieder

$$\left(\frac{d^2W_0}{d\eta^2}\right)\frac{an\delta z}{r} - \left(\frac{dW_0}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r}\cdot\frac{ae\sin\epsilon}{r}$$

Die Störungen der Breite ergeben sich ähnlicher Weise in der ersten Annäherung durch die Addition der drei bez. Glieder von $R_0$, und in der zweiten Annäherung durch Addition der drei bez. Glieder von $\delta R_0$ und Hinzufügung des Gliedes

$$\left(\frac{dR_0}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r}$$

3.

Die hier vorkommenden Elemente lassen sich leicht durch die bekannten elliptischen Elemente ausdrücken. Der im vor. Art. aufgestellte Ausdruck für $W_0$ giebt

$$W_0 = \Xi + T\left(\frac{\varrho}{a_0}\cos\omega + \frac{3}{2}e_0\right) + \Psi\frac{\varrho\sin\omega}{a_0\cos\varphi_0}$$

Digitized by Google

wo $a_0$, $e_0$ und $\varphi_0$ wieder unveränderliche Elemente bedeuten. Vergleichen wir diesen Ausdruck mit (39) (I), so ergiebt sich

$$\Xi = 2\frac{h}{h_0} - \frac{h_0}{h} - 1 - 3e_0\frac{h}{h_0}\xi$$
$$\Upsilon = 2\frac{h}{h_0}\xi, \qquad \Psi = 2\frac{h}{h_0}\eta\cos\varphi_0$$

woraus durch die im Art. 25(I) gegebenen Ausdrücke für $\xi$ und $\eta$

$$\Xi = 2\delta\frac{h}{h_0} - \delta\frac{h_0}{h} - \frac{3e_0}{\cos^2\varphi_0}\frac{h}{h_0}\{e\cos(\chi-\pi_0) - e_0\}$$
$$\Upsilon = \frac{2}{\cos^2\varphi_0}\frac{h}{h_0}\{e\cos(\chi-\pi_0) - e_0\}$$
$$\Psi = \frac{2}{\cos\varphi_0}\frac{h}{h_0}e\sin(\chi-\pi_0)$$

folgt, wo ich wie früher $\delta\frac{h}{h_0}$ für $\frac{h}{h_0} - 1$, und $\delta\frac{h_0}{h}$ für $\frac{h_0}{h} - 1$ geschrieben habe. Statt der im vor. Art. mit $P$ und $Q$ bezeichneten Elemente können wir ohne Weiteres die im Art. 9(I) mit $p$ und $q$ bezeichneten nehmen, und haben also

$$p = \sin i\sin(\sigma-\theta_0)$$
$$q = \sin i\cos(\sigma-\theta_0) - \sin i_0$$

Dieses sind die strengen Ausdrücke für die fünf in der hier entwickelten Methode vorkommenden Elemente, in welchen

$$h = \frac{an}{\cos\varphi} = \frac{k}{\sqrt{a.\cos\varphi}}$$

ist, wenn $k$ die Gaussische Constante bedeutet. Dies Element $h$ ist also der Quadratwurzel aus dem Parameter der Bahn des gestörten Planeten umgekehrt proportional. Wenn man blos die Glieder beibehält, die von der ersten Potenz der störenden Kräfte abhängen, so werden diese Relationen einfacher. Indem man das Zeichen $\delta$ blos auf diese erste Potenz bezieht, wird

$$\delta\frac{h_0}{h} = -\delta\frac{h}{h_0} = \tfrac{1}{2}\delta\frac{a}{a_0} - \frac{\delta e}{\cos^2\varphi_0}$$
$$e\cos(\chi-\pi_0) - e_0 = \delta e$$
$$e\sin(\chi-\pi_0) = e_0\delta\chi$$

und man bekommt daher

$$\Xi = -\tfrac{3}{2}\delta\frac{a}{a_0}$$
$$\Upsilon = \frac{2\delta e}{\cos^2\varphi_0}$$
$$\Psi = \frac{2e_0\delta\chi}{\cos\varphi_0}$$
$$p = \sin i_0\delta\sigma$$
$$q = \cos i_0\delta i$$

Digitized by Google

woraus man erkennt, dass ohne Rücksicht auf die Quadrate und höheren Potenzen der störenden Kräfte

| | | |
|---|---|---|
| $\Xi$ | den Störungen | der grossen Achse |
| $\Upsilon$ | den - | der Excentricität |
| $\Psi$ | den - | der Länge des Perihels |
| $p$ | den - | der Länge des Knotens |
| $q$ | den - | der Neigung |

proportional ist.

4.

Aus den vorhergehenden Abhandlungen ist zu erkennen, dass diese Elemente von den in

$$n\delta z,\ \nu,\ \frac{h}{h_0},\ u \text{ und } \frac{du}{d\varepsilon}$$

enthaltenen Störungen abhängig gemacht worden sind, — der Coordinaten des störenden Planeten nicht zu gedenken, — während sonst in der Methode der Veränderung der willkührlichen Constanten die elliptischen Elemente von ihren eigenen Störungen abhängig gemacht werden. Auch hier kann man diese Abhängigkeit darthun, muss aber zu dem Ende das eliminirte Element wieder einführen. Ich werde zeigen wie man dieses bewirken kann, dabei aber nur auf die ersten Potenzen der Veränderungen Rücksicht nehmen, und der Kürze wegen die Elemente $p$ und $q$ von der Umformung ausschliessen. Die Gleichung (32) (I) giebt nach Einführung der Elemente $\Xi$, $\Upsilon$ und $\Psi$ strenge

$$\frac{dz}{dt} = 1 + \Xi + \Upsilon\left(\frac{\bar{r}}{a_0}\cos\bar{f} + \tfrac{1}{2}e_0\right) + \Psi\frac{\bar{r}\sin\bar{f}}{a_0\cos\varphi_0} + \frac{h_0}{h}\left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2$$

und die Gleichung (33) (I) ist

$$\frac{dz}{dt} = \frac{h_0}{h(1+\nu)^2}$$

Bezeichnen wir nun die hier zu ermittelnden Variationen mit einem den Grössen vorgesetzten $\Delta$, so geben diese beiden Gleichungen

$$\Delta\frac{dz}{dt} = \Delta\Xi + \Delta\Upsilon\left(\frac{\bar{r}\cos\bar{f}}{a_0} + \tfrac{1}{2}e_0\right) + \Delta\Psi\frac{\bar{r}\sin\bar{f}}{a_0\cos\varphi_0}$$
$$+ \left\{-\Upsilon\frac{\sin\bar{f}}{\cos\varphi_0} + \Psi\frac{\cos\bar{f}+e_0}{\cos\varphi_0}\right\}\Delta n\delta z + \left(\frac{\nu}{1+\nu}\right)^2\Delta\frac{h_0}{h} + \frac{2h_0\nu}{h(1+\nu)^3}\Delta\nu$$
$$\Delta\frac{\delta z}{dt} = \frac{1}{(1+\nu)^2}\Delta\frac{h_0}{h} - \frac{2h_0}{h(1+\nu)^3}\Delta\nu$$

woraus nach der Elimination von $\Delta\nu$

Digitized by Google

$$\Delta\frac{d\delta z}{dt} = \frac{\Delta\Xi}{1+\nu} + \frac{\Delta T}{1+\nu}\left(\frac{\overline{r}\cos\overline{f}}{a_0} + \tfrac{3}{2}e_0\right) + \frac{\Delta\Psi}{1+\nu}\frac{\overline{r}\sin\overline{f}}{a_0\cos\varphi_0}$$
$$-\left\{T\frac{\sin\overline{f}}{\cos\varphi_0} - \Psi\frac{\cos\overline{f}+e_0}{\cos\varphi_0}\right\}\frac{\Delta nz}{1+\nu} + \frac{\nu}{(1+\nu)^2}\Delta\frac{h_0}{h}$$

folgt. Aus dem Differential der Gleichung (36)(I) bekommt man nach der Substitution des Ausdrucks für $W$ strenge

$$2\frac{d\nu}{n_0 dt} = T\frac{\sin\overline{f}}{\cos\varphi_0} - \Psi\frac{\cos\overline{f}+e_0}{\cos\varphi_0}$$

und die strengen Ausdrücke des vor. Art. geben

$$\Xi + \tfrac{3}{2}e_0 T = 2\delta\frac{h}{h_0} - \delta\frac{h_0}{h}$$

wovon die Variation

$$\Delta\frac{h_0}{h} = -\frac{\Delta\Xi + \frac{3}{2}e_0\Delta T}{1+2\left(\frac{h_0}{h}\right)^3}$$

ist. Substituirt man diese beiden Gleichungen, und setzt zur Abkürzung

$$J = -\frac{2d\nu}{n_0(1+\nu)dt}$$
$$K = \frac{1}{1+\nu} - \frac{\nu}{(1+\nu)^2}\frac{1}{1+2\left(\frac{h_0}{h}\right)^3}$$
$$L = \frac{1}{1+\nu}\left(\frac{\overline{r}\cos\overline{f}}{a_0} + \tfrac{3}{2}e_0\right) - \frac{3e_0\nu}{2(1+\nu)^2}\frac{1}{1+2\left(\frac{h_0}{h}\right)^3}$$
$$M = \frac{1}{1+\nu}\frac{\overline{r}\sin\overline{f}}{a_0\cos\varphi_0}$$

so wird

$$\Delta\frac{dz}{dt} = J\Delta nz + K\Delta\Xi + L\Delta T + M\Delta\Psi$$

Vermöge der Gleichung

$$\Delta\frac{dz}{dt} = \frac{1}{(1+\nu)^2}\Delta\frac{h_0}{h} - \frac{2h_0}{h(1+\nu)^2}\Delta\nu$$

bekommen wir zuerst

$$\Delta\frac{dW_0}{de_0} = A\Delta nz + B_1\Delta\frac{dz}{dt} + C_1\Delta\frac{h_0}{h}$$

wo

$$B_1 = -B\frac{h(1+\nu)^2}{2h_0};\quad C_1 = B\frac{h(1+\nu)}{2h_0} - C\left(\frac{h}{h_0}\right)^3$$

ist, und $A$, $B$, und $C$ dieselbe Bedeutung haben wie im Art. 43 (I). Eliminiren wir hieraus $\Delta\frac{dz}{dt}$ und $\Delta\frac{h_0}{h}$ durch die eben entwickelten Gleichungen, so wird

$$\Delta\frac{dW_0}{de_0} = N\Delta nz + P\Delta\Xi + Q\Delta T + R\Delta\Psi$$

wo durch folgende Gleichungen

$$N = A + JB_1$$

Digitized by Google

$$P = KB_1 - \frac{C_1}{1+2\left(\frac{k_0}{k}\right)^2}$$

$$Q = LB_1 - \frac{\frac{3}{2}e_0 C_1}{1+2\left(\frac{k_0}{k}\right)^2}$$

$$R = MB_1$$

die Coefficienten gegeben sind.

5.

Um aus den eben gefundenen Gleichungen $\Delta nz$ eliminiren zu können müssen wir das Element wieder einführen, welches eliminirt worden ist, und wenn wir dieses mit $X$ bezeichnen, so können wir die folgende Gleichung dafür aufstellen

$$n\delta z = X + \Upsilon\frac{r_0^2 + a_0 r_0 \cos^2\varphi_0}{2a_0^2\cos\varphi_0}\sin f_0 + \Psi\frac{r_0^2}{2a_0^2 e_0}$$

wovon die Variation

$$\Delta nz = \Delta X + \Delta\Upsilon\frac{r_0^2 + a_0 r_0\cos^2\varphi_0}{2a_0^2\cos\varphi_0}\sin f_0 + \Delta\Psi\frac{r_0^2}{2a_0^2 e_0}$$

ist. Eliminirt man hiermit $\Delta nz$ aus den beiden im vor. Art. entwickelten Gleichungen, so wird

$$\Delta\frac{dz}{dt} = J\Delta X + K\Delta\Xi + L_1\Delta\Upsilon + M_1\Delta\Psi$$

$$\Delta\frac{dW_0}{dt} = N\Delta X + P\Delta\Xi + Q_1\Delta\Upsilon + R_1\Delta\Psi$$

wo

$$L_1 = L + J\frac{r_0^2 + a_0 r_0\cos^2\varphi_0}{2a_0^2\cos\varphi_0}\sin f_0$$

$$M_1 = M + J\frac{r_0^2}{2a_0^2 e_0}$$

$$Q_1 = Q + N\frac{r_0^2 + a_0 r_0\cos^2\varphi_0}{2a_0^2\cos\varphi_0}\sin f_0$$

$$R_1 = R + N\frac{r_0^2}{2a_0^2 e_0}$$

Differentiiren wir die obige Relation zwischen $n\delta z$ und $X$ in Bezug auf $t$, so wird wegen der Gleichung $\frac{de_0}{dt} = \frac{a_0}{r_0}n_0$,

$$\frac{dX}{de_0} = \frac{r_0}{a_0}\frac{d\delta z}{dt} - \Upsilon\frac{r_0}{a_0}\left(\frac{r_0}{a_0}\cos f_0 + \frac{3}{2}e_0\right) - \Psi\frac{r_0}{a_0}\frac{r_0\sin f_0}{a_0\cos\varphi_0}$$
$$- \frac{d\Upsilon}{de_0}\frac{r_0^2 + a_0 r_0\cos^2\varphi_0}{2a_0^2\cos\varphi_0}\sin f_0 - \frac{d\Psi}{de_0}\frac{r_0^2}{2a_0^2 e_0}$$

und die Variation davon wird

$$\Delta\frac{dX}{de_0} = \frac{r_0}{a_0}\Delta\frac{d\delta z}{dt} - \Delta\Upsilon.\frac{r_0}{a_0}\left(\frac{r_0}{a_0}\cos f_0 + \frac{3}{2}e_0\right) - \Delta\Psi.\frac{r_0^2\sin f_0}{a_0^2\cos\varphi_0}$$
$$- \Delta\frac{d\Upsilon}{de_0}.\frac{r_0^2 + a_0 r_0\cos^2\varphi_0}{2a_0^2\cos\varphi_0}\sin f_0 - \Delta\frac{d\Psi}{de_0}.\frac{r_0^2}{2a_0^2 e_0}$$

Digitized by Google

6.

Der Ausdruck für $\frac{dW_0}{d\varepsilon_0}$ nimmt folgende Form an,

$$\frac{dW_0}{d\varepsilon_0} = \frac{d\Xi}{d\varepsilon_0} + \frac{d\Upsilon}{d\varepsilon_0}(\cos\eta + \tfrac{1}{2}e_0) + \frac{d\Psi'}{d\varepsilon_0}\sin\eta$$

und die Variation davon wird also

$$\Delta\frac{dW_0}{d\varepsilon_0} = \Delta\frac{d\Xi}{d\varepsilon_0} + \Delta\frac{d\Upsilon}{d\varepsilon_0}(\cos\eta + \tfrac{1}{2}e_0) + \Delta\frac{d\Psi'}{d\varepsilon_0}\sin\eta$$

Um diesen mit dem im Art. 5 abgeleiteten Ausdruck derselben Grösse vergleichen zu können, müssen wir die Form der dort mit $N$, $P$, $Q$ und $R$ bezeichneten Coefficienten kennen lernen. Jeder derselben kann erstlich auf ähnliche Formen hingeführt werden, wie die für $T$, $X$, etc. im §. 5 (I) gegebenen, und durch die Reihenentwickelungen der Differentialquotienten der Störungsfunction und der Anwendung von solchen Entwickelungen, wie die im §. 4 (II) erklärten können sie auf folgende Form gebracht werden,

$$\begin{aligned}
N = {} & \Sigma\Gamma_s \sin\{(i-i'\mu)\varepsilon + U\} + \Sigma\Gamma_c \cos\{(i-i'\mu)\varepsilon + U\} \\
& + \Sigma A_s \sin\{-\eta + (i-i'\mu)\varepsilon + U\} + \Sigma A_c \cos\{-\eta + (i-i'\mu)\varepsilon + U\} \\
& + \Sigma H_s \sin\{\eta + (i-i'\mu)\varepsilon + U\} + \Sigma H_c \cos\{\eta + (i-i'\mu)\varepsilon + U\}
\end{aligned}$$

wo $U = -i'(c-\mu c')$ ist. Von dieser Form kann man auf die folgende übergehen

$$N = \alpha + \beta(\cos\eta + \tfrac{1}{2}e_0) + \gamma\sin\eta$$

denn die Functionen $\alpha$, $\beta$ und $\gamma$ hängen durch die folgenden Gleichungen von den Gliedern des vorhergehenden Ausdrucks ab,

$$\begin{aligned}
\alpha = {} & \Sigma\{\Gamma_s - \tfrac{e}{2}A_s - \tfrac{e}{2}H_s\}\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon + U\} \\
& + \Sigma\{\Gamma_c - \tfrac{e}{2}A_c - \tfrac{e}{2}H_c\}\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon + U\} \\
\beta = {} & \Sigma\{A_s + H_s\}\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon + U\} \\
& + \Sigma\{A_c + H_c\}\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon + U\} \\
\gamma = {} & -\Sigma\{A_s - H_s\}\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon + U\} \\
& + \Sigma\{A_c - H_c\}\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon + U\}
\end{aligned}$$

Auch kann man diese letztere Form erhalten ohne die erstere vorangehen zu lassen. Eben so bekommt man auch

$$\begin{aligned}
P &= \alpha_1 + \beta_1(\cos\eta + \tfrac{1}{2}e_0) + \gamma_1\sin\eta \\
Q_1 &= \alpha_2 + \beta_2(\cos\eta + \tfrac{1}{2}e_0) + \gamma_2\sin\eta \\
R_1 &= \alpha_3 + \beta_3(\cos\eta + \tfrac{1}{2}e_0) + \gamma_3\sin\eta
\end{aligned}$$

Digitized by Google

Substituirt man nun diese Ausdrücke in den Ausdruck von $\Delta \frac{dW_0}{de_0}$ des Art. 5, und vergleicht ihn alsdann mit dem in diesem Art. gegebenen Ausdruck, so bekommt man sogleich

$$\Delta \frac{d\Xi}{de_0} = \alpha \Delta X + \alpha_1 \Delta \Xi + \alpha_2 \Delta \Upsilon + \alpha_3 \Delta \Psi$$
$$\Delta \frac{d\Upsilon}{de_0} = \beta \Delta X + \beta_1 \Delta \Xi + \beta_2 \Delta \Upsilon + \beta_3 \Delta \Psi$$
$$\Delta \frac{d\Psi}{de_0} = \gamma \Delta X + \gamma_1 \Delta \Xi + \gamma_2 \Delta \Upsilon + \gamma_3 \Delta \Psi$$

und substituirt man die Ausdrücke für $\Delta \frac{dz}{dt}$, $\Delta \frac{d\Upsilon}{de_0}$ und $\Delta \frac{d\Psi}{de_0}$ in den Ausdruck für $\Delta \frac{dX}{de_0}$ des vor. Art., so wird

$$\Delta \frac{dX}{de_0} = \theta \Delta X + \theta_1 \Delta \Xi + \theta_2 \Delta \Upsilon + \theta_3 \Delta \Psi$$

wo

$$\theta = \frac{r_0}{a_0} J - \beta \frac{r_0^2 + a_0 r_0 \cos^2 \varphi_0}{2 a_0^2 \cos \varphi_0} \sin f_0 - \gamma \frac{r_0^2}{2 a_0^2 e_0}$$
$$\theta_1 = \frac{r_0}{a_0} K - \beta_1 \frac{r_0^2 + a_0 r_0 \cos^2 \varphi_0}{2 a_0^2 \cos \varphi_0} \sin f_0 - \gamma_1 \frac{r_0^2}{2 a_0^2 e_0}$$
$$\theta_2 = \frac{r_0}{a_0} L_1 - \frac{r_0}{a_0} \left( \frac{r_0}{a_0} \cos f_0 + \tfrac{1}{2} e_0 \right) - \beta_2 \frac{r_0^2 + a_0 r_0 \cos^2 \varphi_0}{2 a_0^2 \cos \varphi_0} \sin f_0 - \gamma_2 \frac{r_0^2}{2 a_0^2 e_0}$$
$$\theta_3 = \frac{r_0}{a_0} M_1 - \frac{r_0^2 \sin f_0}{a_0^2 \cos \varphi_0} - \beta_3 \frac{r_0^2 + a_0 r_0 \cos^2 \varphi_0}{2 a_0^2 \cos \varphi_0} \sin f_0 - \gamma_3 \frac{r_0^2}{2 a_0^2 e_0}$$

Hiemit sind die Variationen der Differentiale der Elemente $X$, $\Xi$, $\Upsilon$ und $\Psi$ in Function der Variationen dieser Elemente selbst dargestellt.

In der Berechnung der Störungen der kleinen Planeten wende ich zwar diese Formeln nicht an, aber ich werde vielleicht später einen Fall veröffentlichen, in welchem ich sie vor Jahren schon angewandt habe.

## §. 2. Ableitung eines Ausdrucks zur Berechnung der von den Quadraten und den höheren Potenzen der störenden Kräfte abhängigen Glieder der Ungleichheiten sehr langer Periode.

### 7.

Es ist aus dem Vorhergehenden leicht einzusehen, dass der Theil irgend einer Ungleichheit, welcher das Quadrat des durch die Integration erzeugten Divisors bekommt, blos von dem im vor. § mit $\Xi$ bezeichneten Element abhängt, und wenn die Periode der Ungleichheit

Digitized by Google

sehr lang, und folglich der Divisor sehr klein ist, so ist dieser Theil der Ungleichheit der erheblichste. Man kann zwar durch das Verfahren dessen Grundformeln ich in der Abhandlung (I) abgeleitet habe, und welches ich weiter unten ausführlich entwickeln werde, in jedem Falle den von den Quadraten der störenden Kräfte abhängigen Theil aller Ungleichheiten berechnen, allein wenn der Divisor sehr klein ist, so kann namentlich für die Glieder, die das Quadrat desselben bekommen, die Rechnung umständlich werden, weil man in diesem Falle sich genöthigt sehen wird viele Glieder hinzuzuziehen, und die betreffenden Glieder erster Ordnung in Bezug auf die Massen mit mehr als zu den übrigen Zwecken erforderlicher Genauigkeit zu berechnen. Ich werde indess hier zeigen, dass das Element $\Xi$ in dem Falle, wo der störende Planet ein oberer ist, in seinen grösseren Theilen an sich integrabel ist, und diese also im Endresultat in der That nur den kleinen Divisor in der ersten Potenz erhalten, während die Theile die sich nicht integriren lassen zu den kleineren gehören. Da der Jupiter, welcher auf die kleinen Planeten die grösste störende Kraft ausübt, in Bezug auf diese ein oberer ist, so kann diese Formel, wenn in der Theorie der kleinen Planeten sehr kleine Divisoren vorkommen sollten, die grossen Ungleichheiten angehören, gute Dienste leisten. Bei der Berechnung der Störungen der Egeria habe ich diesen Ausdruck nicht angewandt, weil der kleinste Divisor, der dort in den Jupiterstörungen vorkommt, nicht kleiner ist als dass sich das davon abhängige Glied immer noch durch die allgemeinen, weiter unten zu entwickelnden Ausdrücke ohne Unbequemlichkeit berechnen lässt, bei der Berechnung der Mondstörungen hat mir aber dieser Ausdruck sehr gute Dienste geleistet.

8.

Erheben wir von den Gleichungen

$$\Xi = 2\delta\frac{h}{h_0} - \delta\frac{h_0}{h} - \frac{3e_0}{\cos^2\varphi_0}\frac{h}{h_0}\{e\cos(\chi-\pi_0) - e_0\}$$
$$\Upsilon = \frac{2}{\cos^2\varphi_0}\frac{h}{h_0}\{e\cos(\chi-\pi_0) - e_0\}$$
$$\frac{\Psi}{\cos\varphi_0} = \frac{2}{\cos^2\varphi_0}\frac{h}{h_0}e\sin(\chi-\pi_0)$$

des Art. 3 die beiden letzten ins Quadrat und addiren, so ergiebt sich eine Gleichung, die sich leicht wie folgt stellen lässt,

Digitized by Google

$$\frac{e_0}{\cos^2\varphi_0}\left(\frac{h}{h_0}\right)^3 e\cos(\chi-\pi_0)=-\tfrac{1}{8}T^2\cos^2\varphi_0-\tfrac{1}{8}\Psi^2+\frac{e^2}{2\cos^2\varphi_0}\left(\frac{h}{h_0}\right)^3+\frac{e_0^2}{2\cos^2\varphi_0}\left(\frac{h}{h_0}\right)^3$$

eliminirt man hiemit $\cos(\chi-\pi_0)$ aus der ersten, so bekommt man leicht

$$\frac{h}{h_0}\Xi=-\tfrac{3}{2}+\tfrac{3}{2}\frac{h^3\cos^2\varphi}{h_0^3\cos^2\varphi_0}+\tfrac{1}{2}\left(\delta\frac{h}{h_0}\right)^2+\tfrac{3}{8}T^2\cos^2\varphi_0+\tfrac{3}{8}\Psi^2$$

Es ist aber

$$\frac{h^3\cos^2\varphi}{h_0^3\cos^2\varphi_0}=\frac{a_0}{a}$$

Wenn wir daher $\frac{a_0}{a}=1+\delta\frac{a_0}{a}$ setzen, so wird

$$\Xi=\tfrac{3}{2}\delta\frac{a_0}{a}-\Xi\delta\frac{h}{h_0}+\tfrac{1}{2}\left(\delta\frac{h}{h_0}\right)^2+\tfrac{3}{8}(T^2\cos^2\varphi_0+\Psi^2)$$

wo mit Ausnahme des ersten Gliedes alle Glieder rechter Hand Grössen zweiter Ordnung in Bezug auf die störenden Kräfte sind. Nun ist aber

$$\delta\frac{a_0}{a}=-2a_0\int n\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)dt$$

wo wieder $g$ die mittlere Anomalie bedeutet, und

$$n\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)dt=\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)dv+\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)dr$$

Da ferner

$$d\Omega=\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)dv+\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)dr+\left(\frac{d\Omega}{dv'}\right)dv'+\left(\frac{d\Omega}{dr'}\right)dr'$$

ist, so wird

$$\delta\frac{a_0}{a}=-2a_0\Omega+2\int a_0\left(\frac{d\Omega}{dv'}\right)dv'+2\int a_0 r'\left(\frac{d\Omega}{dr'}\right)d.\log r'$$

Da die Ausdrücke für $dv'$ und $d\log r'$ mit $n'$ multiplicirt sind, und wenn der störende Planet ein oberer ist $n'<n$ ist, so sind die Glieder, welche hier unter den Integralzeichen stehen, in diesem Falle immer kleiner wie die Glieder ausserhalb dieses Zeichens. Da ferner die kleinen Planeten keine merklichen Störungen auf die übrigen ausüben, so darf man in der Theorie, die uns hier beschäftigt, für $dv'$ und $d\log r'$ die Werthe substituiren, die sie in der elliptischen Bewegung haben. Da ferner $d\log r'$ von der Ordnung der Excentricität $e'$, und diese in unserem Sonnensystem bei den Planeten die sehr merkliche Störungen ausüben eine kleine Grösse ist; so ist aus diesem Grunde das letzte Glied des vorstehenden Ausdrucks viel kleiner wie das vorhergehende, aber dieses kann, wie ich jetzt zeigen werde, auch in seinem grösseren Theile vom Integralzeichen befreit werden.

Digitized by Google

9.

Aus Art. 34 (I) folgt leicht dass

$$\left(\frac{d\Omega}{d\Pi}\right)\cos J+\left(\frac{d\Omega}{d\Pi'}\right)=\sin J\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)r\cos(f+\Pi)$$

oder da $f+\Pi=(v-\theta_0)+(\Pi-\pi_0+\theta_0)$ ist

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\Omega}{d\Pi}\right)\cos J+\left(\frac{d\Omega}{d\Pi'}\right)&=\cos(\Pi-\pi_0+\theta_0)\sin J\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)r\cos(v-\theta_0)\\&\quad-\sin(\Pi-\pi_0+\theta_0)\sin J\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)r\sin(v-\theta_0)\\&=\cos(\Pi-\pi_0-\theta_0)\frac{\sin J}{h}\frac{dq}{\cos i dt}-\sin(\Pi-\pi_0+\theta_0)\frac{\sin J}{h}\frac{dp}{\cos i dt}\end{aligned}$$

zufolge der Gleichungen (22) (I). Uebergehen wir aber in dem Ausdruck von $dJ$ des Art. (33) (I) die kleinen von $dp'$ und $dq'$ abhängigen Glieder, die hier nie merklichen Einfluss haben können, und erwägen dass

$$\left(\frac{d\Omega}{d\Pi}\right)=\left(\frac{d\Omega}{dv}\right);\quad\left(\frac{d\Omega}{d\Pi'}\right)=\left(\frac{d\Omega}{dv'}\right)$$

so wird die vorstehende Gleichung

$$\left(\frac{d\Omega}{dv'}\right)=-\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)\cos J+\frac{\sin J}{h}\frac{dJ}{dt}$$

und da $d\frac{1}{h}=\left(\frac{d\Omega}{dv}\right)dt$ ist, so bekommen wir hieraus

$$\int\left(\frac{d\Omega}{dv'}\right)dt=-\frac{\cos J}{h}$$

Vermittelst dieser Gleichung giebt nun die partielle Integration

$$\int\left(\frac{d\Omega}{dv'}\right)dv'=-\frac{\cos J}{h}\frac{dv'}{dt}+\int\frac{\cos J}{h}\frac{d^2v'}{dt}$$

und da $d^2v'$ von der Ordnung $e'$ ist, so ist hier das grösste Glied vom Integralzeichen befreit.

Um im Endresultat dieser Integration die wesentliche Eigenschaft der unter dem Integralzeichen stehen gebliebenen Glieder hervor zu heben, will ich bei der Substitution der eben entwickelten Ausdrücke in den Ausdruck für $\Xi$ noch die folgenden Gleichungen anwenden,

$$1=h_0\frac{\cos\varphi_0}{a_0n_0},\quad\mu=\frac{n'}{n_0},\quad d^2v'=-2n'^2e'\frac{a'^3}{r'^2}\sin f'dt^2,$$

$$d\log r'=n'e'\frac{a'\sin f'}{r'\cos\varphi'}dt,\quad dv'=n'\frac{a'^2}{r'^2}\cos\varphi'dt$$

und wir bekommen daher schliesslich

$$\begin{aligned}\Xi=&-3a\Omega-3\mu\cos\varphi_0\cos\varphi'\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\frac{h_0}{h}\cos J-\Xi\delta\frac{h}{h_0}+\tfrac{1}{2}\left(\delta\frac{h}{h_0}\right)^2+\tfrac{3}{8}(\Upsilon^2\cos^2\varphi_0+\Psi^2)\\&+3n'e'\mu\int\left\{ar'\left(\frac{d\Omega}{dr'}\right)\frac{a'\sin f'}{r'\cos\varphi'}-2\mu\cos\varphi_0\frac{h_0}{h}\cos J\left(\frac{a'}{r'}\right)^3\sin f'\right\}dt\end{aligned}$$



Digitized by Google

Diese Gleichung erstreckt sich auf alle Potenzen der störenden Massen, das erste Glied derselben unter dem Integralzeichen ist, abgesehen von diesen Massen, von der Ordnung $e'\mu$ und das zweite von der Ordnung $e'\mu^2$. Diese beiden Glieder sind also desto kleiner, je kleiner die Excentricität des störenden Planeten, und je grösser die grosse Achse seiner Bahn im Verhältniss zu der des gestörten Planeten ist.

Die für die Anwendung dieser Gleichung zur Berechnung der von den Quadraten der störenden Massen abhängigen, in $\Sigma$ befindlichen Glieder einer Ungleichheit von langer Periode noch erforderliche Entwickelung einiger Glieder derselben ist sehr einfach, und leicht zu erhalten. Da ich aber, wie schon erwähnt, bei der Egeria davon keinen Gebrauch gemacht habe, so unterlasse ich diese Entwickelung an diesem Orte, und erwähne nur, dass man dabei durch Anwendung von einigen einfachen Betrachtungen bewirken kann, dass einige der grössten der in den Entwickelungen hervortretenden Glieder, deren Wirkung im Endresultat sich aufheben würde, vor der Anwendung aus der Gleichung verschwinden.

## §. 3. Analytische Entwickelung der Hauptbedingungsgleichung für die von den Quadraten der störenden Kräfte abhängigen Glieder.

### Beweis zweier Sätze, die bei der Berechnung der von den Quadraten der störenden Kräfte abhängigen Glieder angewandt werden.

10.

Die im §. 5 (I) abgeleitete, und unter den Formen (80), (81) und (82) (I) aufgestellte Bedingungsgleichung wurde schon im §. 4 (II) zur Prüfung der Berechnung der Coefficienten der von der ersten Potenz der Massen abhängigen Glieder angewandt, und wird auch weiter unten für die von den Quadraten und Producten derselben abhängigen Glieder in Anwendung gebracht werden. In Bezug auf diese kommt der Umstand wesentlich in Betracht, dass die Berechnung der Störungen hier mit einer mittleren Bewegung ausgeführt wird, die von dem wahren Werthe derselben im Allgemeinen verschieden ist, und dass daraus eine Verbesserung der in der ersten Annäherung angewandten Werthe der Integrationsdivisoren entspringt, deren Berechnung im §. 5 (II) gezeigt wurde. Die hieraus entstehenden Glieder zweiter Ord-

Digitized by Google

nung müssen der eben erwähnten durch (80), (81) oder (82) (I) gegebenen Entwickelung noch hinzugefügt werden, da ohne dieselben der Bedingungsgleichung nicht vollständig würde Gnüge geleistet werden können. Ihre Berechnung ist schon im Art. 56 (II) entwickelt worden. und wir könnten ohne Weiteres die dort erhaltenen Ausdrücke auch in der Bedingungsgleichung anwenden, allein für diese lassen sich die angeführten Ausdrücke sehr vereinfachen, und diese Vereinfachung will ich zuerst entwickeln. Da ich mich an die Form (82) (I) halten werde, so wird zufolge dieser

$$\frac{d\delta z}{dt} + 2\delta\nu = \delta\frac{h_0}{h} + 3\nu^2 - 2\nu.\,\delta\frac{h_0}{h}$$

und da hieraus für die Störungen erster Ordnung

$$\frac{d\delta z}{dt} + 2\nu = \delta\frac{h_0}{h}$$

hervorgeht, so folgt dass wenn man die in Rede stehende Verbesserung an die rechte Seite dieser Gleichung anbringen will, sie

$$\Delta\delta\frac{h_0}{h} - \Delta\frac{d\delta z}{dt} - 2\Delta\nu$$

zum Ausdruck hat, wenn $\Delta$ überhaupt die vom Unterschied zwischen der der Rechnung zu Grunde gelegten, und der wahren mittleren Bewegung herrührende Verbesserung bezeichnet.

11.

Sei nun überhaupt

$$T = M(i)\sin(l_\eta + (i,i')) + N(i)\cos(l_\eta + (i,i'))$$

wo ich der Kürze wegen das Zeichen $(i,i')$ für den Bogen $(i - i'\mu)\,\varepsilon - i'(c' - c_\mu\mu)$ gewählt, und auch, zur Abkürzung, das Summenzeichen, welches der Strenge nach vor den Gliedern rechter Hand gehört, weggelassen habe. Der Index $l$ kann hier, wie aus der Abhandlung (II) hervorgeht, nur die drei Werthe 0 und $\pm$ 1 annehmen. Multipliciren wir nun diesen Ausdruck von $T$ mit $d\varepsilon$ und integriren, so bekommen wir mit Anwendung der in diesen Abhandlungen allgemein eingeführten Bezeichnungen

$$W = k + k_1\cos\eta_l + k_2\sin\eta_l - \frac{M(i)}{i - i'\mu}\cos(l_\eta + (i,i')) + \frac{N(i)}{i - i'\mu}\sin(l_\eta + (i,i'))$$

wo wie früher $k + k_1\cos\eta_l + k_2\sin\eta_l$ die willkührliche Constante ist. Hieraus ergiebt sich durch die Formeln

$$\frac{d\delta z}{dt} = \overline{W},\ 2\nu = -\int\left(\frac{dW}{d\eta}\right)d\varepsilon,\ \delta\frac{h_0}{h} = \int T\,d\varepsilon$$



Digitized by Google

mit wenig Mühe

$$\frac{d\delta z}{dt} = k + k_1 \cos\varepsilon + k_2 \sin\varepsilon - \Sigma' \frac{M(i-l)}{i-l-i'\mu} \cos(i,i') + \Sigma' \frac{N(i-l)}{i-l-i'\mu} \sin(i,i')$$

$$2\nu = -k_1 \cos\varepsilon - k_2 \sin\varepsilon + \Sigma' \frac{lM(i-l)}{(i-i'\mu)(i-l-i'\mu)} \cos(i,i') - \Sigma' \frac{lN(i-l)}{(i-i'\mu)(i-l-i'\mu)} \sin(i,i')$$

$$\delta \frac{h_0}{h} = -K - \frac{\Sigma' M(i-l)}{i-i'\mu} \cos(i,i') + \frac{\Sigma' N(i-l)}{i-i'\mu} \sin(i,i')$$

wo die Summenzeichen sich auf $l$ beziehen. Zufolge der Bemerkung des Art. 56 (II) müssen wir hier allenthalben, wo Integrationen vorgekommen sind, bevor wir die Variation in Bezug auf den Unterschied der beiden Gattungen von mittlerer Bewegung nehmen können, das constante $n_0$ der Zähler von dem veränderlichen $n$ der Nenner trennen. Wir müssen daher diese Ausdrücke erst wie folgt schreiben,

$$\frac{d\delta z}{dt} = k + k_1 \cos\varepsilon + k_2 \sin\varepsilon - n_0 \Sigma' \frac{M(i-l)}{in-ln-i'n'} \cos(i,i') + n_0 \Sigma' \frac{N(i-l)}{in-ln-i'n'} \sin(i,i')$$

$$2\nu = -n_0 \frac{k_1}{n} \cos\varepsilon - n_0 \frac{k_2}{n} \sin\varepsilon + n_0^2 \Sigma' \frac{lM(i-l)}{(in-i'n')(in-ln-i'n')} \cos(i,i')$$

$$- n_0^2 \Sigma' \frac{lN(i-l)}{(in-i'n')(in-ln-i'n')} \sin(i,i')$$

$$\delta \frac{h_0}{h} = -K - n_0 \frac{\Sigma' M(i-l)}{in-i'n'} \cos(i,i') + n_0 \frac{\Sigma' N(i-l)}{in-i'n'} \sin(i,i')$$

und hieraus bekommen wir

$$\delta \frac{h_0}{h} - \frac{d\delta z}{dt} - 2\nu = -K - k - \frac{n-n_0}{n} \{k_1 \cos\varepsilon + k_2 \sin\varepsilon\}$$

$$+ \Sigma' \frac{n_0(n-n_0)lM(i-l)}{(in-i'n')(in-ln-i'n')} \cos(i,i') - \Sigma' \frac{n_0(n-n_0)lN(i-l)}{(in-i'n')(in-ln-i'n')} \sin(i,i')$$

Nimmt man hievon die Variation in Bezug auf $n$, und setzt darauf $n_0 = n$, so wird augenscheinlich

$$\Delta\delta \frac{h_0}{h} - \Delta \frac{d\delta z}{dt} - 2\Delta\nu = 2\nu \frac{\Delta n}{n}$$

wo zufolge der Ableitung der vollständige Ausdruck von $\nu$, das ist der Ausdruck von $\nu$ mit Inbegriff der Glieder, welche die willkührlichen Constanten enthalten angewandt werden muss. Es wird sich indess weiter unten zeigen, dass es gleichgültig ist, ob man das constante Glied des Ausdrucks von $\nu$ mit zuzieht oder nicht. In der vorstehenden Ableitung ist zwar keine specielle Rücksicht auf die in den Ausdrücken der vorstehenden Gleichung enthaltenen, mit $nt$ ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen multiplicirten, Glieder genommen worden, allein es ist leicht zu finden, dass man, um diese Gleichung zu erfüllen, auch diese Glieder von $2\nu$ mit $\frac{\Delta n}{n}$ multipliciren muss. Unsere

Digitized by Google

im vor. Art. angeführte Bedingungsgleichung wird also in dem Falle wo der Berechnung der Störungen nicht von Anfang an der wahre Werth der mittleren Bewegung zu Grunde gelegt worden ist,

$$\frac{d\delta z}{dt} + 2\delta\nu = \delta\frac{h_0}{h} + 3\nu^2 - 2\nu\delta\frac{h_0}{h} + 2\nu\frac{\Delta n}{n} \qquad (1)$$

wo

$$\Delta n = (n) - n_0$$

ist, wenn $(n)$ den wahren, und überhaupt $n_0$ den der Berechnung der Störungen untergelegten Werth der mittleren Bewegung bedeutet. In der so gestellten Bedingungsgleichung muss dagegen die im Art. 56 (II) erklärte Verbesserung der Integrationsdivisoren weggelassen werden.

## 12.

Der Beweis dieser Bedingungsgleichung ist in der Abhandlung (I) so allgemein wie möglich geführt, aber obgleich ich meine, dass sich gegen diesen Beweis nichts Gründliches einwenden lässt, so halte ich es doch nicht für undienlich auch durch eine allgemeine Entwickelung der Glieder dieser Gleichung zu zeigen, dass sie in der That für die von dem Quadrat der störenden Kraft abhängigen Glieder erfüllt wird. Es kann diese Entwickelung dienen um die innere Beschaffenheit dieser Gleichung aufzudecken, und man kann daraus eine Hinweisung schöpfen auf welche Theile der Rechnung man vorzugsweise seine Aufmerksamkeit wenden muss, wenn bei der Anwendung der Gleichung auf numerisch berechnete Coefficienten man hie und da zuerst eine Nichtübereinstimmung finden sollte, die auf begangene Rechnungsfehler deutet. Es kann ferner die vorzunehmende analytische Entwickelung, wenn es noch nöthig wäre, zur Verification der in der Abhandlung (II) entwickelten Theorie der willkührlichen Constanten dienen. Denn es ist klar, dass die von diesen Constanten abhängigen Glieder nur der obigen Bedingungsgleichung genügen können, wenn sie nach richtigen Grundsätzen in die Ausdrücke der Störungen eingeführt sind.

Es ist leicht einzusehen, dass diese Bedingungsgleichung für je zwei beliebige Werthe des Index $i'$ statt finden muss, allein sie findet ausserdem auch für je zwei beliebige Werthe des Index $i$ statt. Man braucht daher in der analytischen Entwickelung derselben überhaupt nur auf zwei Glieder von $T$ und den übrigen davon abhängigen Functio-

Digitized by Google

nen Rücksicht zu nehmen. Um Vollständigkeit in diese Entwickelungen zu legen kann man sich mit den allgemeinen Ausdrücken dieser Glieder nicht begnügen, sondern muss auf die Glieder, die in den Integrationen besondere Formen annehmen, besondere Rücksicht nehmen. Diese verschiedenen Gattungen von Gliedern sollen alle im Folgenden betrachtet werden, um aber die Ausdrücke nicht allzu lang werden zu lassen, sollen die verschiedenartigen Glieder nach und nach betrachtet und substituirt werden.

Zuvor werde ich zeigen, dass diese Bedingungsgleichung für ihre analytische Entwickelung in vier Gleichungen zerlegt werden kann, von welchen drei so beschaffen sind, dass sich ihre Entwickelung auf sehr kurze Weise ausführen lässt. Bei der Anwendung dieser Bedingungsgleichung zur Controle numerisch berechneter Störungscoefficienten kann diese Zerlegung bei der Aufsuchung von Rechnungsfehlern zuweilen mit Nutzen angewandt werden.

13.

Da für die Störungen zweiter Ordnung

$$\frac{d\delta z}{dt} = \overline{\delta W}_0 + \overline{\left(\frac{dW}{d\eta}\right)}\frac{an\delta z}{r} + \nu^2$$

$$2\nu = -\int\overline{\left(\frac{d\delta W_0}{d\eta}\right)}d\varepsilon - \int\left\{\overline{\left(\frac{d^2W}{d\eta^2}\right)}\frac{a}{r} - \overline{\left(\frac{dW}{d\eta}\right)}\frac{a^2e\sin\varepsilon}{r^2}\right\}n\delta z.d\varepsilon$$

ist, so wird die Bedingungsgleichung (1) zuerst

$$(2)\qquad 0 = \overline{\delta W}_0 - \int\overline{\left(\frac{d\delta W_0}{d\eta}\right)}\,d\varepsilon - \delta\frac{h_0}{h} - 2\nu\left(\nu - \delta\frac{h_0}{h} + \frac{\Delta n}{n}\right) + R = 0$$

wenn wir zur Abkürzung

$$(3)\qquad R = \overline{\left(\frac{dW}{d\eta}\right)}\frac{an\delta z}{r} - \int\left\{\overline{\left(\frac{d^2W}{d\eta^2}\right)}\frac{a}{r} - \overline{\left(\frac{dW}{d\eta}\right)}\frac{a^2e\sin\varepsilon}{r^2}\right\}n\delta z.d\varepsilon$$

setzen. Zufolge der Artt. 43 und 47 (I) ist, wenn wir von den Gliedern, welche die Breitenstörungen und die von den Producten der Massen abhängigen Störungen enthalten, absehen

$$\frac{d\delta W_0}{d\varepsilon} = A\frac{an\delta z}{r} + B\nu + C\delta\frac{h}{h_0}$$

$$\frac{d\delta\frac{h_0}{h}}{d\varepsilon} = A'\frac{an\delta z}{r} + B'\nu$$

wo

$$A = \left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right) - T\frac{ae\sin\varepsilon}{r}$$

$$B = V + X$$

Digitized by Google

$$C = 2\{T + X + \overline{T}\}$$
$$A' = \left(\frac{d\overline{T}}{d\varepsilon}\right) - \overline{T}\frac{ae\sin\varepsilon}{r}$$
$$B' = \overline{V}$$

ist, und alle Bezeichnungen dieselben sind wie in §. 5 (I). Da aber, wie leicht einzusehen,

$$\left(\frac{d\overline{T}}{d\varepsilon}\right) = \left(\frac{d\overline{T}}{d\varepsilon}\right) + \left(\frac{d\overline{T}}{d\eta}\right)$$

ist, so folgt sogleich aus den vorstehenden Ausdrücken dass auch

$$A' = \overline{A} + \left(\frac{d\overline{T}}{d\eta}\right)$$

ist, und wir erhalten demnach

$$\delta\frac{h_0}{h} = \int\left(\frac{d\overline{T}}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r}d\varepsilon + \int\left\{\overline{A}\frac{an\delta z}{r} + \overline{V}\nu\right\}d\varepsilon$$

Substituiren wir diesen Ausdruck in die Bedingungsgleichung (2), so wird sie

$$\overline{\delta W_0} - \int\left(\frac{d\overline{\delta W_0}}{d\eta}\right)d\varepsilon - \int\left\{\overline{A}\frac{an\delta z}{r} + \overline{V}\nu\right\}d\varepsilon$$
$$- \int\left(\frac{d\overline{T}}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r}d\varepsilon - 2\nu\left(\nu - \delta\frac{h_0}{h} + \frac{\Delta n}{n}\right) + R = 0$$

14.

Sei nun

$$\frac{dP}{d\varepsilon} = A\frac{an\delta z}{r};\ \frac{dQ}{d\varepsilon} = V\nu;\ \frac{dM}{d\varepsilon} = C\delta\frac{h}{h_0};\ \frac{dN}{d\varepsilon} = X\nu \qquad (4)$$

woraus zufolge der im vor. Art. angeführten Ausdrücke

$$\delta W_0 = P + Q + M + N$$

folgt, dann findet die Bedingungsgleichung für jede der vier Functionen $P$, $Q$, $M$, $N$ abgesondert statt, oder wenn man die vorstehenden Ausdrücke in die am Ende des vor. Art. gefundene Gleichung substituirt, so wird für sich

$$\overline{P} - \int\left(\frac{d\overline{P}}{d\eta}\right)d\varepsilon - \int\overline{A}\frac{an\delta z}{r}d\varepsilon = 0$$
$$\overline{Q} - \int\left(\frac{d\overline{Q}}{d\eta}\right)d\varepsilon - \int\overline{V}\nu.d\varepsilon = 0$$
$$\overline{M} - \int\left(\frac{d\overline{M}}{d\eta}\right)d\varepsilon = 0$$
$$\overline{N} - \int\left(\frac{d\overline{N}}{d\eta}\right)d\varepsilon - \int\left(\frac{d\overline{T}}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r}d\varepsilon - 2\nu\left(\nu - \delta\frac{h_0}{h} + \frac{\Delta n}{n}\right) + R = 0 \qquad (5)$$

deren Summe die angeführte Gleichung bildet.

Um diese Gleichungen zu beweisen muss man sich jeden der Factoren, die sie enthalten, in unendliche Reihen von der Form entwickelt denken, die in den §§. 4 und 5 (II) angewandt wurde. Sei darauf aus

Digitized by Google

der Multiplication irgend eines Gliedes des Ausdrucks von $\frac{an\delta z}{r}$ mit irgend einem Gliede des Ausdrucks von $A$ im Product $A\frac{n\delta z}{ar}$ das folgende Glied hervorgegangen

$$N(i)\varepsilon \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (l\eta + (i,i'))$$

so dass in Bezug auf dasselbe

$$\frac{dP}{d\varepsilon} = N(i)\varepsilon \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (l\eta + (i,i'))$$

wird. Ich bemerke hiezu dass zwar in diesem sowohl wie in den übrigen Producten für jedes Argument Glieder vorhanden sind, die $\varepsilon$ oder statt dessen $nt$ ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen enthalten, dass aber auch in Bezug auf jedes Argument Glieder vorkommen, die diesen Factor nicht enthalten, und dass diese letzteren im Allgemeinen die grösseren Glieder sind. Dass ich hier ausdrücklich das mit $\varepsilon$ multiplicirte Glied betrachte, geschieht um den Beweis sogleich auf diese Gattung von Gliedern auszudehnen, indem der Uebergang von diesen zu jenen einfacher ist, wie der entgegengesetzte Uebergang. Aus dem obigen Ausdruck folgt

$$\begin{aligned}
P &= \mp \tfrac{N(i)}{i-i'\mu}\, \varepsilon \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (l\eta + (i,i')) + \tfrac{N(i)}{(i-i'\mu)^2} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (l\eta + (i,i'))\\
\tfrac{dP}{d\eta} &= \tfrac{lN(i)}{i-i'\mu}\, \varepsilon \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (l\eta + (i,i')) \pm \tfrac{lN(i)}{(i-i'\mu)^2} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (l\eta + (i,i'))\\
\overline{P} &= \mp \Sigma \tfrac{N(i-l)}{i-l-i'\mu}\, \varepsilon \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (i,i') + \Sigma \tfrac{N(i-l)}{(i-l-i'\mu)^2} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (i,i')\\
\overline{\left(\tfrac{dP}{d\eta}\right)} &= \Sigma \tfrac{lN(i-l)}{i-l-i'\mu}\, \varepsilon \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (i,i') \pm \Sigma \tfrac{lN(i-l)}{(i-l-i'\mu)^2} \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (i,i')\\
\int\overline{\left(\tfrac{dP}{d\eta}\right)} d\varepsilon &= \mp \tfrac{1}{i-i'\mu} \Sigma \tfrac{lN(i-l)}{i-l-i'\mu}\, \varepsilon \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (i,i')\\
&\quad + \tfrac{1}{(i-i'\mu)^2} \Sigma \tfrac{lN(i-l)}{i-l-i'\mu} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (i,i') + \tfrac{1}{i-i'\mu} \Sigma \tfrac{lN(i-l)}{(i-l-i'\mu)^2} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (i,i')
\end{aligned}$$

wo die Summationen sich wieder auf $l$ beziehen, und daher nur die drei Werthe 0 und $\pm 1$ von $l$ in sich begreifen. Diese Ausdrücke geben

$$(6) \qquad \overline{P} - \int\overline{\left(\tfrac{dP}{d\eta}\right)} d\varepsilon = \mp \tfrac{\Sigma N(i-l)}{i-i'\mu}\, \varepsilon \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (i,i') + \tfrac{\Sigma N(i-l)}{(i-i'\mu)^2} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (i,i')$$

Da nun das dem obigen Gliede von $A\frac{an\delta z}{r}$ entsprechende Glied von $\overline{A}\frac{an\delta z}{r}$ nothwendiger Weise

$$\overline{A}\tfrac{an\delta z}{r} = \Sigma N(i-l)\, \varepsilon \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (i,i')$$

Digitized by Google

ist, so ergiebt sich

$$\int \overline{A\frac{\partial z}{r}}\, d\varepsilon = \mp \frac{\Sigma N(i-l)}{i-i'\mu}\, \varepsilon \begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix} (i,i') + \frac{\Sigma N(i-l)}{(i-i'\mu)^2} \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (i,i')$$

also

$$\overline{P} - \int \overline{\left(\frac{dP}{d\eta}\right)}\, d\varepsilon - \int \overline{A\frac{\partial z}{r}}\, d\varepsilon = 0$$

Hiemit ist die erste der obigen vier Gleichungen, in welche wir die Bedingungsgleichung zerlegt haben, für die mit $\varepsilon$ multiplicirten Glieder bewiesen, und um den Beweis auch für die Glieder zu bekommen, die diesen Factor nicht enthalten braucht man nur in den vorstehenden Integralen die Glieder welche den Factor $\varepsilon$ nicht enthalten weg zu streichen, und in den übrigen den Factor $\varepsilon = 1$ zu setzen.

Da die zweite unserer drei Gleichungen der ersten eben bewiesenen völlig ähnlich ist, so braucht der Beweis für diese nicht besonders geführt zu werden, und auch der Beweis der dritten Gleichung lässt sich aus den vorstehenden Entwickelungen leicht erhalten. Zu dem Ende bemerke ich dass Art. 42 (I)

$$T = \frac{1}{\cos\varphi}\left\{2\varrho\cos(f-\omega) - r + \frac{2\varrho r}{a\cos^2\varphi}\left[\cos(f-\omega)-1\right]\right\}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)$$
$$+ \frac{2}{\cos\varphi}\,\varrho\sin(f-\omega)\, r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

und Art. 44 (I)

$$X = -\frac{2}{\cos\varphi}\,\varrho\cos(f-\omega)\left(\frac{d\Omega}{df}\right) - \frac{2}{\cos\varphi}\,\varrho\sin(f-\omega)\, r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

gesetzt wurde. Verwandelt man in diesen Ausdrücken $\omega$ in $f$ und $\varrho$ in $r$, so ergiebt sich die Gleichung

$$\overline{X} = -2\overline{T}$$

Nun ist aber wie im vor. Art. angeführt wurde

$$C = 2(T + X + \overline{T})$$

also

$$\overline{C} = 0$$

Nehmen wir nun an, dass nach der Entwickelung und der Multiplication von $C$ mit $\vartheta\frac{h}{h_0}$ irgend ein Glied im Differential von $M$

$$\frac{dM}{d\varepsilon} = N(i)\varepsilon \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix} (l\eta + (i,i'))$$

sei, dann ist in Folge der eben gefundenen Gleichung

$$\Sigma N(i-l) = 0$$

Digitized by Google

und folglich zufolge der Gleichung (6), wenn wir darin $M$ statt $P$ schreiben

$$\overline{M} - \int \left(\frac{d\overline{M}}{d\eta}\right) d\varepsilon = 0$$

W. Z. B. W. Auf dieselbe Art beweist man ferner dass diese Gleichungen auch für die Glieder, in welchen $i' = 0$ und $i = 0$ oder $= \pm 1$ ist, und deren Integrale eine andere Form annehmen, statt finden.

Wir haben also im Folgenden blos die Gleichung (5) zu entwickeln.

## 15.

Wenn wir die Gleichung (5) ohne Weiteres der Entwickelung unterwerfen wollten, so würden wir wegen der Divisoren $r$ und $r^2$ die darin vorkommen auf unendliche Reihen geführt; diese können aber durch die folgende Umformung vermieden werden. Differentiiren wir den Ausdruck (3) für $R$, so ergiebt sich

$$\frac{dR}{d\varepsilon} = \frac{d\left(\frac{d\overline{W}}{d\eta}\right)}{d\varepsilon} \frac{a}{r} n\delta z + \left(\frac{d\overline{W}}{d\eta}\right) \frac{a}{r} \frac{d\delta z}{d\varepsilon} - \left(\frac{d^2\overline{W}}{d\eta^2}\right) \frac{a}{r} n\delta z$$

aber es ist leicht einzusehen dass

$$\frac{d\left(\frac{d\overline{W}}{d\eta}\right)}{d\varepsilon} = \left(\frac{d^2\overline{W}}{d\eta^2}\right) + \left(\frac{d^2W}{d\eta d\varepsilon}\right)$$

und

$$\left(\frac{d^2\overline{W}}{d\eta d\varepsilon}\right) = \left(\frac{d\overline{T}}{d\eta}\right)$$

ist; da wir nun ferner auch

$$n \frac{d\delta z}{d\varepsilon} = \frac{d\delta z}{dt} \frac{r}{a}$$

haben, so wird nach der Substitution und der Rückintegration

$$R = \int \left(\frac{d\overline{T}}{d\eta}\right) \frac{an\delta z}{r} d\varepsilon + \int \left(\frac{d\overline{W}}{d\eta}\right) \frac{d\delta z}{dt} d\varepsilon$$

Substituirt man diesen Ausdruck in (5), so ergiebt sich

$$(7) \qquad \overline{N} - \int \left(\frac{d\overline{N}}{d\eta}\right) d\varepsilon + \int \left(\frac{d\overline{W}}{d\eta}\right) \frac{d\delta z}{dt} d\varepsilon - 2\nu\left(\nu - \delta \frac{h_0}{h} + \frac{\varepsilon n}{n}\right) = 0$$

in deren Entwickelung keine unendlichen Reihen innerhalb der einzelnen Argumente vorkommen.

## 16.

Da wir nun zuerst die Ausdrücke erster Ordnung der Störungen haben müssen, so könnten wir die schon oben abgeleiteten benutzen,

Digitized by Google

allein um etwas mehr Einfachheit in die zu entwickelnden Formeln zu bringen, will ich hier

$$T = (i - i'\mu)\, D(i) \sin(l\eta + (i,i')) + (i - i'\mu)\, E(i) \cos(l\eta + (i,i')) \qquad (8)$$

setzen, wo $(i,i')$ dieselbe Bedeutung hat wie im Art. 11. Den Factor $i - i'\mu$ habe ich hinzugefügt, damit er in den folgenden Ausdrücken im Nenner nicht vorkomme, und die Glieder dadurch etwas einfacher mache. Aus diesem Ausdruck von $T$ bekommen wir zuerst die folgenden allgemeinen Glieder

$$\begin{aligned}
W &= -D(i)\cos(l\eta + (i,i')) + E(i)\sin(l\eta + (i,i')) \\
\frac{d\delta z}{dt} = \overline{W} &= -\Sigma D(i-l)\cos(i,i') + \Sigma E(i-l)\sin(i,i') \\
\left(\frac{dW}{d\eta}\right) &= \Sigma l D(i-l)\sin(i,i') + \Sigma l E(i-l)\cos(i,i') \\
\nu &= \tfrac{1}{2}\frac{\Sigma D(i-l)}{i-i'\mu}\cos(i,i') - \tfrac{1}{2}\frac{\Sigma E(i-l)}{i-i'\mu}\sin(i,i') \\
\vartheta\tfrac{h_0}{h} &= -\frac{\Sigma(i-l-i'\mu)\,D(i-l)}{i-i'\mu}\cos(i,i') + \frac{\Sigma i-l-i'\mu)\,E(i-l)}{i-i'\mu}\sin(i,i')
\end{aligned}$$

die wir zuerst in die Bedingungsgleichung substituiren wollen.

## 17.

Nehmen wir irgend zwei Glieder der Entwickelung von $X$ vor, und nennen sie

$$\begin{aligned}
X = {} & A(p)\sin(l\eta + (p,p')) + B(p)\cos(l\eta + (p,p')) \\
& + A(q)\sin(l\eta + (q,q')) + B(q)\cos(l\eta + (q,q'))
\end{aligned} \qquad (9)$$

dann müssen wir diese mit den folgenden analogen Gliedern von $\nu$ verbinden

$$\begin{aligned}
\nu = {} & \tfrac{1}{2}\frac{\Sigma l D(p-l)}{p-p'\mu}\cos(p,p') - \tfrac{1}{2}\frac{\Sigma l E(p-l)}{p-p'\mu}\sin(p,p') \\
& + \tfrac{1}{2}\frac{\Sigma l D(q-l)}{q-q'\mu}\cos(q,q') - \tfrac{1}{2}\frac{\Sigma l E(q-l)}{q-q'\mu}\sin(q,q')
\end{aligned}$$

und es reicht bei der Multiplication aus im Product blos die mit den Argumenten $((p \pm q), (p' \pm q'))$ behafteten Glieder zu berücksichtigen, da hiemit schon die grösste Allgemeinheit erlangt ist. Multipliciren wir daher, substituiren in (9), integriren, und setzen zur Abkürzung

$$i = p \pm q\,;\; i' = p' \pm q'$$

so bekommen wir

Digitized by Google

$$N = -\tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix} \frac{A(p)\Sigma lD(q-l)}{q-q'\mu} & \frac{A(q)\Sigma lD(p-l)}{p-p'\mu} \\ \mp\frac{B(p)\Sigma lE(q-l)}{q-q'\mu} - & \frac{B(q)\Sigma lE(p-l)}{p-p'\mu} \end{matrix}\right\}\frac{\cos(l\eta+(i,i'))}{i-i'\mu}$$

$$+\tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix} \frac{B(p)\Sigma lD(q-l)}{q-q'\mu} + & \frac{B(q)\Sigma lD(p-l)}{p-p'\mu} \\ \pm\frac{A(p)\Sigma lE(q-l)}{q-q'\mu} \pm & \frac{A(q)\Sigma lE(p-l)}{p-p'\mu} \end{matrix}\right\}\frac{\sin(l\eta+(i,i'))}{i-i'\mu}$$

und da hieraus

$$\overline{N} = -\tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix} \Sigma\frac{A(p-l)}{i-l-i'\mu}\cdot\frac{\Sigma lD(q-l)}{q-q'\mu} \pm \Sigma\frac{A(q-l)}{i-l-i'\mu}\cdot\frac{\Sigma lD(p-l)}{p-p'\mu} \\ \mp\Sigma\frac{B(p-l)}{i-l-i'\mu}\cdot\frac{\Sigma lE(q-l)}{q-q'\mu} - \Sigma\frac{B(q-l)}{i-l-i'\mu}\cdot\frac{\Sigma lE(p-l)}{p-p'\mu} \end{matrix}\right\}\cos(i,i')$$

$$+\tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix} \Sigma\frac{B(p-l)}{i-l-i'\mu}\cdot\frac{\Sigma lD(q-l)}{q-q'\mu} + \Sigma\frac{B(q-l)}{i-l-i'\mu}\cdot\frac{\Sigma lD(p-l)}{p-p'\mu} \\ \pm\Sigma\frac{A(p-l)}{i-l-i'\mu}\cdot\frac{\Sigma lE(q-l)}{q-q'\mu} \pm \Sigma\frac{A(q-l)}{i-l-i'\mu}\cdot\frac{\Sigma lE(p-l)}{p-p'\mu} \end{matrix}\right\}\sin(i,i')$$

und

$$\int\left(\frac{dN}{d\eta}\right)d\varepsilon = -\tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix} \Sigma\frac{lA(p-l)}{i-l-i'\mu}\cdot\frac{\Sigma lD(q-l)}{q-q'\mu} \pm \Sigma\frac{lA(q-l)}{i-l-i'\mu}\cdot\frac{\Sigma lD(p-l)}{p-p'\mu} \\ \mp\Sigma\frac{lB(p-l)}{i-l-i'\mu}\cdot\frac{\Sigma lE(q-l)}{q-q'\mu} - \Sigma\frac{lB(q-l)}{i-l-i'\mu}\cdot\frac{\Sigma lE(p-l)}{p-p'\mu} \end{matrix}\right\}\frac{\cos(i,i')}{i-i'\mu}$$

$$+\tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix} \Sigma\frac{lB(p-l)}{i-l-i'\mu}\cdot\frac{\Sigma lD(q-l)}{q-q'\mu} + \Sigma\frac{lB(q-l)}{i-l-i'\mu}\cdot\frac{\Sigma lD(p-l)}{p-p'\mu} \\ \pm\Sigma\frac{lA(p-l)}{i-l-i'\mu}\cdot\frac{\Sigma lE(q-l)}{q-q'\mu} \pm \Sigma\frac{lA(q-l)}{i-l-i'\mu}\cdot\frac{\Sigma lE(p-l)}{p-p'\mu} \end{matrix}\right\}\frac{\sin(i,i')}{i-i'\mu}$$

folgt, so ergiebt sich

$$\overline{N} - \int\left(\frac{dN}{d\eta}\right)d\varepsilon = -\tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix} \frac{\Sigma A(p-l)\,.\,\Sigma lD(q-l)}{(i-i'\mu)\,(q-q'\mu)} \pm \frac{\Sigma A(q-l)\,.\,\Sigma lD(p-l)}{(i-i'\mu)\,(p-p'\mu)} \\ \mp\frac{\Sigma B(p-l)\,.\,\Sigma lE(q-l)}{(i-i'\mu)\,(q-q'\mu)} - \frac{\Sigma B(q-l)\,.\,\Sigma lE(p-l)}{(i-i'\mu)\,(p-p'\mu)} \end{matrix}\right\}\cos(i,i')$$

$$+\tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix} \frac{\Sigma B(p-l)\,.\,\Sigma lD(q-l)}{(i-i'\mu)\,(q-q'\mu)} + \frac{\Sigma B(q-l)\,.\,\Sigma lD(p-l)}{(i-i'\mu)\,(p-p'\mu)} \\ \pm\frac{\Sigma A(p-l)\,.\,\Sigma lE(q-l)}{(i-i'\mu)\,(q-q'\mu)} \pm \frac{\Sigma A(q-l)\,.\,\Sigma lE(p-l)}{(i-i'\mu)\,(p-p'\mu)} \end{matrix}\right\}\sin(i,i')$$

Verwandeln wir aber in den Ausdrücken (8) und (9) $\eta$ in $\varepsilon$, so bekommen wir wegen der oben gefundenen Gleichung $\overline{X} = -2\overline{T}$ die Relationen

$$(10)\qquad \begin{cases} \Sigma A(i-l) = -2\Sigma(i-l-i'\mu)\,D(i-l) \\ \Sigma B(i-l) = -2\Sigma(i-l-i'\mu)\,E(i-l) \end{cases}$$

die für alle Argumente ohne Ausnahme gelten. Die vorstehende Gleichung verwandelt sich dadurch in

Digitized by Google

$$\overline{N}-\int\left(\frac{dN}{d\eta}\right)d\varepsilon=\tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\frac{\Sigma(p-l-p'\mu)\,D(p-l)\,.\,\Sigma lD(q-l)}{(i-i'\mu)\,(q-q'\mu)}\pm\frac{\Sigma(q-l-q'\mu)D(q-l)\,.\,\Sigma lD(p-l)}{(i-i'\mu)\,(p-p'\mu)}\\ \mp\frac{\Sigma(p-l-p'\mu)\,E(p-l)\,.\,\Sigma lE(q-l)}{(i-i'\mu)\,(q-q'\mu)}-\frac{\Sigma(q-l-q'\mu)\,E(q-l)\,.\,\Sigma lE(p-l)}{(i-i'\mu)\,(p-p'\mu)}\end{matrix}\right\}\cos(i,i')$$

$$-\tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\frac{\Sigma(p-l-p'\mu)\,D(p-l)\,.\,\Sigma lD(q-l)}{(i-i'\mu)\,(q-q'\mu)}+\frac{\Sigma(q-l-q'\mu)E(q-l)\,.\,\Sigma lD(p-l)}{(i-i'\mu)\,(p-p'\mu)}\\ \pm\frac{\Sigma((p-l-p'\mu)\,D(p-l)\,.\,\Sigma lE(q-l)}{(i-i'\mu)\,(q-q'\mu)}\pm\frac{\Sigma(q-l-q'\mu)\,D(q-l)\,.\,\Sigma lE(p-l)}{(i-i'\mu)\,(p-p'\mu)}\end{matrix}\right\}\sin(i,i')$$

womit die beiden ersten Glieder der Bedingungsgleichung (7) entwickelt sind.

## 18.

Um das dritte Glied der Bedingungsgleichung zu entwickeln müssen wir aus dem Art. 16 die folgenden Ausdrücke entlehnen,

$$\left(\frac{d\overline{W}}{d\eta}\right)= \Sigma lD(p-l)\sin(p,p')+\Sigma lE(p-l)\cos(p,p')$$
$$+\Sigma lD(q-l)\sin(q,q')+\Sigma lE(q-l)\cos(q,q')$$
$$\frac{d\partial z}{dt}=-\Sigma D(p-l)\cos(p,p')+\Sigma E(p-l)\sin(p,p')$$
$$-\Sigma D(q-l)\cos(q,q')+\Sigma E(q-l)\sin(q,q')$$

multipliciren wir diese mit einander und mit $d\varepsilon$ und integriren, so erhalten wir

$$\int\left(\frac{d\overline{W}}{d\eta}\right)\frac{d\partial z}{dt}d\varepsilon=\tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\frac{\Sigma D(q-l)\,.\,\Sigma lD(p-l)}{i-i'\mu}\pm\frac{\Sigma D(p-l)\,.\,\Sigma lD(q-l)}{i-i'\mu}\\ \mp\frac{\Sigma E(q-l)\,.\,\Sigma lE(p-l)}{i-i'\mu}-\frac{\Sigma E(p-l)\,.\,\Sigma lE(q-l)}{i-i'\mu}\end{matrix}\right\}\cos(i,i')$$

$$-\tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\pm\frac{\Sigma E(q-l)\,.\,\Sigma lD(p-l)}{i-i'\mu}\pm\frac{\Sigma E(p-l)\,.\,\Sigma lD(q-l)}{i-i'\mu}\\ +\frac{\Sigma D(q-l)\,.\,\Sigma lE(p-l)}{i-i'\mu}+\frac{\Sigma D(p-l)\,.\,\Sigma lE(q-l)}{i-i'\mu}\end{matrix}\right\}\sin(i,i')$$

Aus dem Art. 16 folgt ferner

$$\nu-\partial\frac{h_0}{h}+\frac{\Delta n}{n}=\frac{\Sigma(p-\frac{1}{2}l-p'\mu)D(p-l)}{p-p'\mu}\cos(p,p')-\frac{\Sigma(p-\frac{1}{2}l-p'\mu)E(p-l)}{p-p'\mu}\sin(p,p')$$
$$+\frac{\Sigma(q-\frac{1}{2}l-q'\mu)D(q-l)}{q-q'\mu}\cos(q,q')-\frac{\Sigma(q-\frac{1}{2}l-q'\mu)E(q-l)}{q-q'\mu}\sin(q,q')$$
$$2\nu=\frac{\Sigma lD(p-l)}{p-p'\mu}\cos(p,p')-\frac{\Sigma lE(p-l)}{p-p'\mu}\sin(p,p')$$
$$+\frac{\Sigma lD(q-l)}{q-q'\mu}\cos(q,q')-\frac{\Sigma lE(q-l)}{q-q'\mu}\sin(q,q')$$

wozu die Grösse $\frac{\Delta n}{n}$ keinen Beitrag hat liefern können, weil sie blos Function der willkührlichen Constanten ist, die hier noch nicht in Betracht gezogen werden. Aus den vorstehenden Ausdrücken folgt

Digitized by Google

$$2\nu\left(\nu-\delta\frac{h_0}{h}+\frac{\Delta n}{n}\right)=$$

$$\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\frac{\Sigma(q-\frac{1}{2}l-q'\mu)D(q-l)\,.\,\Sigma lD(p-l)}{(p-p'\mu)\,(q-q'\mu)}+\frac{\Sigma(p-\frac{1}{2}l-p'\mu)D(p-l)\,.\,\Sigma lD(q-l)}{(p-p'\mu)\,(q-q'\mu)}\\ \mp\frac{\Sigma(q-\frac{1}{2}l-q'\mu)E(q-l)\,.\,\Sigma lE(p-l)}{(p-p'\mu)\,(q-q'\mu)}\mp\frac{\Sigma(p-\frac{1}{2}l-p'\mu)E(p-l)\,.\,\Sigma lE(q-l)}{(p-p'\mu)\,(q-q'\mu)}\end{array}\right\}\cos(i,i')$$

$$-\frac{1}{2}\left\{\begin{array}{l}\pm\frac{\Sigma(q-\frac{1}{2}l-q'\mu)E(q-l)\,.\,\Sigma lD(p-l)}{(p-p'\mu)\,(q-q'\mu)}+\frac{\Sigma(p-\frac{1}{2}l-p'\mu)E(p-l)\,.\,\Sigma lD(q-l)}{(p-p'\mu)\,(q-q'\mu)}\\ +\frac{\Sigma(q-\frac{1}{2}l-q'\mu)D(q-l)\,.\,\Sigma lE(p-l)}{(p-p'\mu)\,(q-q'\mu)}\pm\frac{\Sigma(p-\frac{1}{2}l-p'\mu)D(p-l)\,.\,\Sigma lE(q-l)}{(p-p'\mu)\,(q-q'\mu)}\end{array}\right\}\sin(i,i')$$

womit alle Glieder der Bedingungsgleichung entwickelt sind.

## 19.

Substituiren wir nun die im Vorhergehenden ausgeführten Entwickelungen in (7) und bringen alle Glieder auf einen und denselben Nenner, so bekommen wir

$$\begin{array}{l}
0=(p-p'\mu)\Sigma(p-l-p'\mu)D(p-l)\,.\,\Sigma lD(q-l)\pm(q-q'\mu)\Sigma(q-l-q'\mu)D(q-l)\,.\,\Sigma lD(p-l)\\
+(p-p'\mu)\,(q-q'\mu)\,\Sigma D(q-l)\,.\,\Sigma lD(p-l)\pm(p-p'\mu)\,(q-q'\mu)\,\Sigma D(p-l)\,.\,\Sigma lD(q-l)\\
-(i-i'\mu)\Sigma(q-\frac{1}{2}l-q'\mu)D(q-l)\,.\,\Sigma lD(p-l)-(i-i'\mu)\Sigma(p-\frac{1}{2}l-p'\mu)D(p-l)\,.\,\Sigma lD(q-l)\\
\mp(p-p'\mu)\Sigma(p-l-p'\mu)E(p-l)\,.\,\Sigma lE(q-l)-(q-q'\mu)\Sigma(q-l-q'\mu)E(q-l)\,.\,\Sigma lE(p-l)\\
\mp(p-p'\mu)\,(q-q'\mu)\,\Sigma E(q-l)\,.\,\Sigma lE(p-l)-(p-p'\mu)\,(q-q'\mu)\,\Sigma E(p-l)\,.\,\Sigma lE(q-l)\\
\pm(i-i'\mu)\Sigma(q-\frac{1}{2}l-q'\mu)E(q-l)\,.\,\Sigma lE(p-l)\pm(i-i'\mu)\Sigma(p-\frac{1}{2}l-p'\mu)E(p-l)\,.\,\Sigma lE(q-l)\\
0=(p-p'\mu)\Sigma(p-l-p'\mu)E(p-l)\,.\,\Sigma lD(q-l)+(q-q'\mu)\Sigma(q-l-q'\mu)E(q-l)\,.\,\Sigma lD(p-l)\\
\pm(p-p'\mu)\,(q-q'\mu)\,\Sigma E(q-l)\,.\,\Sigma lD(p-l)\pm(p-p'\mu)\,(q-q'\mu)\,\Sigma E(p-l)\,.\,\Sigma lD(q-l)\\
\mp(i-i'\mu)\Sigma(q-\frac{1}{2}l-q'\mu)E(q-l)\,.\,\Sigma lD(p-l)-(i-i'\mu)\Sigma(p-\frac{1}{2}l-p'\mu)E(p-l)\,.\,\Sigma lD(q-l)\\
\pm(p-p'\mu)\Sigma(p-l-p'\mu)D(p-l)\,.\,\Sigma lE(q-l)\pm(q-q'\mu)\Sigma(q-l-q'\mu)D(q-l)\,.\,\Sigma lE(p-l)\\
+(p-p'\mu)\,(q-q'\mu)\,\Sigma D(q-l)\,.\,\Sigma lE(p-l)+(p-p'\mu)\,(q-q'\mu)\,\Sigma D(p-l)\,.\,\Sigma lE(q-l)\\
-(i-i'\mu)\Sigma(q-\frac{1}{2}l-q'\mu)D(q-l)\,.\,\Sigma lE(p-l)\mp(i-i'\mu)\Sigma(p-\frac{1}{2}l-p'\mu)D(p-l)\,.\,\Sigma lE(q-l)
\end{array}$$

Da die erste dieser beiden Gleichungen aus zwei abgesonderten einander völlig ähnlichen Theilen besteht, von welchen der eine von den $D$- und der andere von den $E$-Coefficienten abhängt, so ist klar, dass sie in zwei Gleichungen zerfallen muss, und dass wenn die eine dieser identisch Null ist, die andere nothwendig auch identisch Null sein muss; es braucht daher nur gezeigt zu werden, dass die ersten sechs Glieder derselben einander aufheben. Zu dem Ende bemerke ich dass

Digitized by Google

$$\Sigma'(q-\tfrac{1}{2}l-q'\mu)D(q-l) = (q-q'\mu)\Sigma D(q-l)-\tfrac{1}{2}\Sigma lD(q-l)$$
$$\Sigma'(p-\tfrac{1}{2}l-p'\mu)D(p-l) = (p-p'\mu)\Sigma D(p-l)-\tfrac{1}{2}\Sigma lD(p-l)$$
$$i-i'\mu \qquad = (p-p'\mu) \pm (q-q'\mu)$$

ist. Substituirt man diese Werthe in das fünfte und sechste Glied der ersten Gleichung, so werden die ersten sechs Glieder derselben

$$\begin{aligned}
0=&(p-p'\mu)\Sigma'(p-l-p'\mu)D(p-l).\Sigma lD(q-l) \pm (q-q'\mu)\Sigma'(q-l-q'\mu)D(q-l).\Sigma lD(p-l)\\
&-(p-p'\mu)^2\,\Sigma D(p-l).\Sigma lD(q-l) \mp (q-q'\mu)^2\,\Sigma D(q-l).\Sigma lD(p-l).\\
&+(p-p'\mu)\Sigma lD(q-l).\Sigma lD(p-l) \pm (q-q'\mu)\,\Sigma lD(q-l).\Sigma lD(p-l).
\end{aligned}$$

aber es ist auch

$$\Sigma'(p-l-p'\mu)D(p-l) = (p-p'\mu)\Sigma D(p-l)-\Sigma lD(p-l)$$
$$\Sigma'(q-l-q'\mu)D(q-l) = (q-q'\mu)\Sigma D(q-l)-\Sigma lD(q-l)$$

vermittelst welcher man sogleich erkennt, dass die vorstehende Gleichung identisch Null ist. Es ist ferner

$$\Sigma'(q-\tfrac{1}{2}l-q'\mu)E(q-l) = (q-q'\mu)E(q-l)-\tfrac{1}{2}\Sigma lE(q-l)$$
$$\Sigma'(p-\tfrac{1}{2}l-p'\mu)E(p-l) = (p-p'\mu)E(p-l)-\tfrac{1}{2}\Sigma lE(p-l)$$

und durch diese und die vorhergehenden verwandelt man leicht die zweite Gleichung in folgende,

$$\begin{aligned}
0=&(p-p'\mu)\Sigma'(p-l-p'\mu)E'(p-l).\Sigma lD(q-l) + (q-q'\mu)\Sigma'(q-l-q'\mu)E(q-l).\Sigma lD(p-l)\\
&-(p-p'\mu)^2\,\Sigma E(p-l).\Sigma lD(q-l) - (q-q'\mu)^2\,\Sigma E(q-l).\Sigma lD(p-l)\\
&\pm(p-p'\mu)\,\Sigma lE(q-l).\Sigma lD(p-l) + (q-q'\mu)\,\Sigma lE(q-l).\Sigma lD(p-l)\\
&\pm(p-p'\mu)\Sigma'(p-l-p'\mu)D(p-l).\Sigma lE(q-l) \pm (q-q'\mu)\Sigma'(q-l-q'\mu)D(q-l).\Sigma lE(p-l)\\
&\mp(p-p'\mu)^2\,\Sigma D(p-l).\Sigma lE(q-l) \mp (q-q'\mu)^2\Sigma D(q-l).\Sigma lE(p-l)\\
&+(p-p'\mu)\Sigma lD(q-l).\Sigma lE(p-l) \pm (q-q'\mu)\Sigma lD(q-l).\Sigma lE(p-l)
\end{aligned}$$

deren Identität auf dieselbe Weise erkannt wird wie die jener Gleichung.

## 20.

Im Vorhergehenden ist die Identität der Bedingungsgleichung für die allgemeine Form der darin zu substituirenden Glieder entwickelt worden, aber zur Vervollständigung dieser Analyse sind noch die Glieder zu betrachten, die durch die Integrationen andere Formen annehmen, und sich daher in Bezug auf die allgemeine Form als Ausnahmeglieder gestalten. Solche entstehen schon durch die Substitution der im Vorhergehenden betrachteten Glieder der allgemeinen Form, und diese wollen wir zuerst vornehmen. Wir könnten sie schon dadurch erhalten, dass wir in den vorhergehenden Ausdrücken, vor den Integra-

Digitized by Google

tionen $p'=q'$, und nach einander $p=q$ und $p=q+1$ setzten, und dabei die unteren Zeichen anwendeten, allein ich halte für übersichtlicher die Multiplicationen von Neuem auszuführen. Da wir hiebei in dem Factor $X$ den Index $l$ von $\eta$ specialisiren müssen, so will ich für die Coefficienten von $X$ allgemein die Zeichen $A(l,i)$ und $B(l,i)$, statt der oben angewandten $A(i)$ und $B(i)$ gebrauchen. Die von $X$ in Betracht zu ziehenden Glieder sind nun

$$\begin{aligned}
X = {} & A(0,p)\sin(p,p') && + B(0,p)\cos(p,p') \\
& + A(-1,p+1)\sin(-\eta+(p+1,p')) && + B(-1,p+1)\cos(-\eta+(p+1,p')) \\
& + A(1,p-1)\sin(\eta+(p-1,p')) && + B(1,p-1)\cos(\eta+(p-1,p')) \\
& + A(0,p+1)\sin(p+1,p') && + B(0,p+1)\cos(p+1,p') \\
& + A(-1,p+2)\sin(-\eta+(p+2,p')) && + B(-1,p+2)\cos(-\eta+(p+2,p')) \\
& + A(1,p)\sin(\eta+(p,p')) && + B(1,p)\cos(\eta+(p,p'))
\end{aligned}$$

die mit den folgenden von $\nu$ verbunden werden müssen.

$$\begin{aligned}
\nu = {} & \tfrac{1}{2}\frac{\Sigma ID(p-l)}{p-p'\mu}\cos(p,p') - \tfrac{1}{2}\frac{\Sigma IE(p-l)}{p-p'\mu}\sin(p,p') \\
& + \tfrac{1}{2}\frac{\Sigma ID(p+1-l)}{p+1-p'\mu}\cos(p+1,p') - \tfrac{1}{2}\frac{\Sigma IE(p+1-l)}{p+1-p'\mu}\sin(p+1,p')
\end{aligned}$$

Die Multiplication und Integration giebt leicht

$$\begin{aligned}
N = {} & -\tfrac{1}{4}\frac{A(0,p)\,\Sigma IE(p-l) - B(0,p)\,\Sigma ID(p-l)}{p-p'\mu}\,\varepsilon \\
& -\tfrac{1}{4}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{A(-1,p+1)\,\Sigma ID(p-l) + B(-1,p+1)\,\Sigma IE(p-l)}{p-p'\mu} \\ -\dfrac{A(1,p-1)\,\Sigma ID(p-l) + B(1,p-1)\,\Sigma IE(p-l)}{p-p'\mu}\end{array}\right\}\cos(-\eta+\varepsilon) \\
& -\tfrac{1}{4}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{A(-1,p+1)\,\Sigma IE(p-l) - B(-1,p+1)\,\Sigma ID(p-l)}{p-p'\mu} \\ +\dfrac{A(1,p-1)\,\Sigma IE(p-l) - B(1,p-1)\,\Sigma ID(p-l)}{p-p'\mu}\end{array}\right\}\sin(-\eta+\varepsilon) \\
& -\tfrac{1}{4}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{A(0,p+1)\,\Sigma ID(p-l) + B(0,p+1)\,\Sigma IE(p-l)}{p-p'\mu} \\ -\dfrac{A(0,p)\,\Sigma ID(p+1-l) + B(0,p)\,\Sigma IE(p+1-l)}{p+1-p'\mu}\end{array}\right\}\cos\varepsilon \\
& -\tfrac{1}{4}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{A(0,p+1)\,\Sigma IE(p-l) - B(0,p+1)\,\Sigma ID(p-l)}{p-p'\mu} \\ +\dfrac{A(0,p)\,\Sigma IE(p+1-l) - B(0,p)\,\Sigma ID(p+1-l)}{p+1-p'\mu}\end{array}\right\}\sin\varepsilon \\
& -\tfrac{1}{4}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{A(-1,p+2)\,\Sigma ID(p-l) + B(-1,p+2)\,\Sigma IE(p-l)}{p-p'\mu} \\ -\dfrac{A(1,p-1)\,\Sigma ID(p+1-l) + B(1,p-1)\,\Sigma IE(p+1-l)}{p+1-p'\mu}\end{array}\right\}\cos(-\eta+2\varepsilon)
\end{aligned}$$

Digitized by Google

$$-\tfrac{1}{4}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{A(-1,p+2)\,\Sigma IE(p-l)-B(-1,p+2)\,\Sigma ID(p-l)}{p-p'\mu}\\ +\dfrac{A(1,p-1)\,\Sigma IE(p+1-l)-B(1,p-1)\,\Sigma ID(p+1-l)}{p+1-p'\mu}\end{array}\right\}\sin(-\eta+2\varepsilon)$$

$$+\tfrac{1}{4}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{A(1,p)\,\Sigma ID(p-l)+B(1,p)\,\Sigma IE(p-l)}{p-p'\mu}\\ -\dfrac{A(-1,p+1)\,\Sigma ID(p+1-l)+B(-1,p+1)\,\Sigma IE(p+1-l)}{p+1-p'\mu}\end{array}\right\}\varepsilon\sin\eta$$

$$-\tfrac{1}{4}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{A(1,p)\,\Sigma IE(p-l)-B(1,p)\,\Sigma ID(p-l)}{p-p'\mu}\\ +\dfrac{A(-1,p+1)\,\Sigma IE(p+1-l)-B(-1,p+1)\,\Sigma ID(p+1-l)}{p+1-p'\mu}\end{array}\right\}\varepsilon\cos\eta$$

und hieraus bekommt man mit Weglassung der constanten Glieder, und wenn man bedenkt, dass die Gleichungen (10), nachdem man erst $p$ und $p+1$ statt $l$, und dann auf der linken Seite $0, -1$ und $+1$ statt $l$ substituirt hat,

$$A(0,p)+A(-1,p+1)+A(1,p-1)=-2\Sigma(p-l-p'\mu)\,D(p-l)$$
$$B(0,p)+B(-1,p+1)+B(1,p-1)=-2\Sigma(p-l-p'\mu)\,E(p-l)$$
$$A(0,p+1)+A(-1,p+2)+A(1,p)=-2\Sigma(p+1-l-p'\mu)\,D(p+1-l)$$
$$B(0,p+1)+B(-1,p+2)+B(1,p)=-2\Sigma(p+1-l-p'\mu)\,E(p+1-l)$$

geben,

$$\overline{N}-\int\left(\frac{dN}{d\eta}\right)d\varepsilon=\tfrac{1}{4}\,\frac{\Sigma(p-l-p'\mu)\,D(p-l).\,\Sigma IE(p-l)-\Sigma(p-l-p'\mu)\,E(p-l).\,\Sigma ID(p-l)}{p-p'\mu}\,\varepsilon$$

$$+\tfrac{1}{4}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\Sigma(p+1-l-p'\mu)\,D(p+1-l).\,\Sigma ID(p-l)+\Sigma(p+1-l-p'\mu)\,E(p+1-l).\,\Sigma IE(p+1-l)}{p-p'\mu}\\ -\dfrac{\Sigma(p-l-p'\mu)\,D(p-l).\,\Sigma ID(p+1-l)+\Sigma(p-l-p'\mu)\,E(p-l).\,\Sigma IE(p+1-l)}{p+1-p'\mu}\end{array}\right\}\cos\varepsilon$$

$$+\tfrac{1}{4}\left\{\begin{array}{l}\dfrac{\Sigma(p+1-l-p'\mu)\,D(p+1-l).\,\Sigma IE(p-l)-\Sigma(p+1-l-p'\mu)E(p+1-l).\,\Sigma ID(p-l)}{p-p'\mu}\\ +\dfrac{\Sigma(p-l-p'\mu)\,D(p-l).\,\Sigma IE(p+1-l)-\Sigma(p-l-p'\mu)\,E(p-l).\,\Sigma ID(p+1-l)}{p+1-p'\mu}\end{array}\right\}\sin\varepsilon$$

Die constanten Glieder der Producte und Integrale müssen hier und in den weiter unten folgenden Entwickelungen weggelassen werden, weil sie nichts bedeuten können. Aus den constanten Gliedern der Bedingungsgleichung (1) wurde nemlich in §. 5 (II) die Constante $C$ des Ausdrucks für $\nu$ abgeleitet, und wir könnten daher durch Zuziehung dieser Glieder hier höchstens die Glieder zweiter Ordnung dieser Constante wieder erhalten. Aber auch dieses lässt sich nicht erlangen, weil wir für die Gleichung (7) eine neue Integration vorgenommen haben, und wir könnten also nur die constanten Glieder benutzen, um die dieser Integration hinzuzufügende Constante zu bestimmen, wozu wieder der genannte Ausdruck für $C$ mit benutzt werden müsste.



Digitized by Google

21.

Es ist nun ferner anzuwenden

$$\left(\frac{d\overline{W}}{d\eta}\right) = \begin{aligned} &\Sigma lD(p-l)\sin(p,p') + \Sigma lE(p-l)\cos(p,p') \\ &+\Sigma lD(p+1-l)\sin(p+1,p') + \Sigma lE(p+1-l)\cos(p+1,p') \end{aligned}$$

$$\frac{d\delta z}{dt} = \begin{aligned} &-\Sigma D(p-l)\cos(p,p') + \Sigma E(p-l)\sin(p,p') \\ &-\Sigma D(p+1-l)\cos(p+1,p') + \Sigma E(p+1-l)\sin(p+1,p') \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} \int\left(\frac{d\overline{W}}{d\eta}\right)\frac{d\delta z}{dt}d\varepsilon = &\tfrac{1}{2}\{\ \Sigma lD(p-l).\Sigma E(p-l) - \Sigma D(p-l).\Sigma lE(p-l)\}\ \varepsilon \\ &-\tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\Sigma D(p+1-l).\Sigma lD(p-l)+\Sigma E(p+1-l).\Sigma lE(p-l)\\ -\Sigma D(p-l).\Sigma lD(p+1-l)-\Sigma E(p-l).\Sigma lE(p+1-l)\end{matrix}\right\}\cos\varepsilon \\ &-\tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\Sigma D(p+1-l).\Sigma lE(p-l)-\Sigma E(p+1-l).\Sigma lD(p-l)\\ +\Sigma D(p-l).\Sigma lD(p+1-l)-\Sigma E(p-l).\Sigma lD(p+1-l)\end{matrix}\right\}\sin\varepsilon \end{aligned}$$

hervorgeht, ausserdem findet man leicht

$$\begin{aligned} &2\nu\left(\nu-\delta\frac{h_0}{h}+\frac{\Delta n}{n}\right) = \\ &\tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\frac{\Sigma(p-\frac{1}{2}l-p'\mu)D(p-l).\Sigma lD(p+1-l)+\Sigma(p-\frac{1}{2}l-p'\mu)E(p-l).\Sigma lE(p+1-l)}{(p-p'\mu)(p+1-p'\mu)}\\ +\frac{\Sigma(p+1-\frac{1}{2}l-p'\mu)D(p+1-l).\Sigma lD(p-l)+\Sigma(p+1-\frac{1}{2}l-p'\mu)E(p+1-l).\Sigma lE(p-l)}{(p-p'\mu)(p+1-p'\mu)}\end{matrix}\right\}\cos\varepsilon \\ &+\tfrac{1}{2}\left\{\begin{matrix}\frac{\Sigma(p-\frac{1}{2}l-p'\mu)E(p-l).\Sigma lD(p+1-l)-\Sigma(p-\frac{1}{2}l-p'\mu)D(p-l).\Sigma lE(p+1-l)}{(p-p'\mu)(p+1-p'\mu)}\\ -\frac{\Sigma(p+1-\frac{1}{2}l-p'\mu)E(p+1-l).\Sigma lD(p-l)-\Sigma(p+1-\frac{1}{2}l-p'\mu)D(p+1-l).\Sigma lE(p-l)}{(p-p'\mu)(p+1-p'\mu)}\end{matrix}\right\}\sin\varepsilon \end{aligned}$$

Substituirt man diese Entwickelungen in (7), so bekommt man die folgenden drei Gleichungen:

$$\begin{aligned} 0 = &\Sigma(p-l-p'\mu)D(p-l).\Sigma lE(p-l)-\Sigma(p-l-p'\mu)E(p-l).\Sigma lD(p-l) \\ &-(p-p'\mu)\Sigma D(p-l).\Sigma lE(p-l)+(p-p'\mu)\Sigma E(p-l).\Sigma lD(p-l) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = &(p+1-p'\mu)\Sigma(p+1-l-p'\mu)D(p+1-l).\Sigma lD(p-l)-(p-p'\mu)\Sigma(p-l-p'\mu)D(p-l).\Sigma lD(p+1-l) \\ &+(p+1-p'\mu)(p-p'\mu)\Sigma D(p-l).\Sigma lD(p+1-l)-(p+1-p'\mu)(p-p'\mu)\Sigma D(p+1-l).\Sigma lD(p-l) \\ &-\Sigma(p-\tfrac{1}{2}l-p'\mu)D(p-l).\Sigma lD(p+1-l)-\Sigma(p+1-\tfrac{1}{2}l-p'\mu)D(p+1-l).\Sigma lD(p-l) \\ &+(p+1-p'\mu)\Sigma(p+1-l-p'\mu)E(p+1-l).\Sigma lE(p+1-l)-(p-p'\mu)\Sigma(p-l-p'\mu)E(p-l).\Sigma lE(p+1-l) \\ &+(p+1-p'\mu)(p-p'\mu)\Sigma E(p-l).\Sigma lE(p+1-l)-(p+1-p'\mu)(p-p'\mu)\Sigma E(p+1-l).\Sigma lE(p-l) \\ &-\Sigma(p-\tfrac{1}{2}l-p'\mu)E(p-l).\Sigma lE(p+1-l)-\Sigma(p+1-\tfrac{1}{2}l-p'\mu)E(p+1-l).\Sigma lE(p-l) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 0 = &(p+1-p'\mu)\Sigma(p+1-l-p'\mu)E(p+1-l).\Sigma lD(p-l)+(p-p'\mu)\Sigma(p-l-p'\mu)E(p-l).\Sigma lD(p+1-l) \\ &-(p+1-p'\mu)(p-p'\mu)\Sigma E(p-l).\Sigma lD(p+1-l)-(p+1-p'\mu)(p-p'\mu)\Sigma E(p+1-l).\Sigma lD(p-l) \\ &+\Sigma(p-\tfrac{1}{2}l-p'\mu)E(p-l).\Sigma lD(p+1-l)-\Sigma(p+1-\tfrac{1}{2}l-p'\mu)E(p+1-l).\Sigma lD(p-l) \\ &-(p+1-p'\mu)\Sigma(p+1-l-p'\mu)D(p+1-l).\Sigma lE(p-l)-(p-p'\mu)\Sigma(p-l-p'\mu)D(p-l).\Sigma lE(p+1-l) \\ &+(p+1-p'\mu)(p-p'\mu)\Sigma D(p-l).\Sigma lE(p+1-l)+(p+1-p'\mu)(p-p'\mu)\Sigma D(p+1-l).\Sigma lE(p-l) \\ &-\Sigma(p-\tfrac{1}{2}l-p'\mu)D(p-l).\Sigma lE(p+1-l)+\Sigma(p+1-\tfrac{1}{2}l-p'\mu)D(p+1-l).\Sigma lE(p-l) \end{aligned}$$

Digitized by Google

Die Identität der ersten dieser Gleichungen ist auf den ersten Blick zu erkennen, und die beiden andern stellen sich als specielle Fälle der beiden Gleichungen dar, auf welche wir im Art. 19 hingeführt wurden. Schreibt man nemlich in diesen 0 für $i'$, 1 für $i$, $p+1$ für $p$, $p$ für $q$ und $p'$ für $q'$, so verwandeln sie sich in die obigen. Der a. a. O. geführte Beweis der Identität der beiden dortigen Gleichungen erstreckt sich also auch auf die beiden letzten vorstehenden.

## 22.

Es kommen jetzt die Glieder in Betracht, die von den Ausnahmegliedern der ersten Ordnung entstehen, und zwar geben diese theils Glieder der allgemeinen Form, theils wieder Ausnahmeglieder. Um für diese Entwickelungen die Ausnahmeglieder erster Ordnung zu erhalten, will ich dieselbe Bezeichnung wie im §. 5 (II) anwenden, und demgemäss setzen

$$\begin{aligned} T= & \quad - G(1.c)\sin(-\eta+\varepsilon) \\ & \tfrac{e}{2}H(0.s) \quad - eH(0.s)\cos(-\eta+\varepsilon) \\ & -F(1,c)\sin\varepsilon - G(2.c)\sin(-\eta+2\varepsilon) - H(0.c)\sin\eta \\ & +F(1,s)\cos\varepsilon + G(2.s)\cos(-\eta+2\varepsilon) + H(0.s)\cos\eta \end{aligned}$$

welches die Glieder sind, aus welchen durch die Integrationen die Ausnahmeglieder, oder die Glieder, die von der allgemeinen Form abweichen, hervorgehen.

In diesen Ausdruck von $T$ habe ich bereits die Relationen eingeführt, die zufolge der Gleichung (19) (II) zwischen dreien seiner Coefficienten statt finden. Wir bekommen hieraus, nachdem wir den Integralen die willkührlichen Constanten nach Anleitung des §. 5 (II) hinzugefügt haben,

$$\begin{aligned} W= & \quad k \quad + G(1.c)\cos(-\eta+\varepsilon) + k_1\cos\eta \\ & + \tfrac{e}{2}H(0,s)\varepsilon - eH(0.s)\sin(-\eta+\varepsilon) + k_2\sin\eta \\ & \qquad + F(1.c)\cos\varepsilon + \tfrac{1}{4}G(2.c)\cos(-\eta+2\varepsilon) + H(0.s)\varepsilon\cos\eta \\ & \qquad + F(1.s)\sin\varepsilon + \tfrac{1}{4}G(2.s)\sin(-\eta+2\varepsilon) - H(0.c)\varepsilon\sin\eta \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \overline{W}= & \quad \{k + G(1.c)\} \quad + \tfrac{e}{2}H(0.s)\varepsilon \\ & + \{k_1 + F(1.c) + \tfrac{1}{4}G(2,c)\}\cos\varepsilon + H(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon \\ & + \{k_2 + F(1.s) + \tfrac{1}{4}G(2.s)\}\sin\varepsilon - H(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon \end{aligned}$$



Digitized by Google

$$\left(\frac{dW}{d\eta}\right) = eH(0.s) - \{k_1 - \tfrac{1}{2}G(2.c)\}\sin\varepsilon - H(0.s)\varepsilon\sin\varepsilon + \{k_2 - \tfrac{1}{2}G(2.s)\}\cos\varepsilon - H(0.c)\varepsilon\cos\varepsilon$$

$$\nu = C_0 - \tfrac{e}{2}H(0.s)\varepsilon - \tfrac{1}{2}\{k_1 - \tfrac{1}{2}G(2.c) - H(0.c)\}\cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}H(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}\{k_2 - \tfrac{1}{2}G(2.s) - H(0.s)\}\sin\varepsilon + \tfrac{1}{2}H(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon$$

$$\delta\frac{h_0}{h} = -K - \tfrac{e}{2}H(0.s)\varepsilon + \{F(1.c) + G(2.c) + H(0.c)\}\cos\varepsilon + \{F(1.s) + G(2.s) + H(0.s)\}\sin\varepsilon$$

Da die im Art. 51 (II) mit $Z_0$ bezeichnete Grösse hier durch $G(1.c)$ dargestellt wird, weil ich statt $\varepsilon\sin\varepsilon$ nicht $nt\sin\varepsilon$ einführen werde, indem diese Einführung die folgenden Entwickelungen zusammengesetzter machen würde, so wird hier

$$(11) \qquad \begin{cases} C_0 = -\tfrac{1}{2}(bk + ek_1 + 3G(1.c)) \\ k = \tfrac{1}{2}(k + ek_1) \end{cases}$$

## 23.

Um die vorstehenden Ausdrücke abzukürzen, setze ich

$$P(1.c) = F(1.c) + \tfrac{1}{2}G(2.c)$$
$$P(1.s) = F(1.s) + \tfrac{1}{2}G(2.s)$$
$$\Pi(1.c) = F(1.c) + G(2.c) + H(0.c)$$
$$\Pi(1.s) = F(1.s) + G(2.s) + H(0.s)$$
$$\lambda_1 = k_1 + P(1.c)$$
$$\lambda_2 = k_2 + P(1.s)$$

wodurch

$$\overline{W} = k + G(1.c) + \lambda_1\cos\varepsilon + \lambda_2\sin\varepsilon + \tfrac{e}{2}H(0.s)\varepsilon + H(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon - H(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon$$

$$\left(\frac{dW}{d\eta}\right) = -\lambda_1\sin\varepsilon + \lambda_2\cos\varepsilon + eH(0.s) + \{\Pi(1.c) - H(0.c)\}\sin\varepsilon - \{\Pi(1.s) - H(0.s)\}\cos\varepsilon - H(0.s)\varepsilon\sin\varepsilon - H(0.c)\varepsilon\cos\varepsilon$$

$$\nu = C_0 - \tfrac{1}{2}\lambda_1\cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}\lambda_2\sin\varepsilon + \tfrac{1}{2}\Pi(1.c)\cos\varepsilon + \tfrac{1}{2}\Pi(1.s)\sin\varepsilon - \tfrac{e}{2}H(0.s)\varepsilon - \tfrac{1}{2}H(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon + \tfrac{1}{2}H(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon$$

$$\delta\frac{h_0}{h} = -K + \Pi(1.c)\cos\varepsilon + \Pi(1.s)\sin\varepsilon - \tfrac{e}{2}H(0.s)\varepsilon$$

wird. Multiplicirt man nun den vorstehenden Ausdruck von $\overline{W}$ mit $1 - e\cos\varepsilon$, so ergiebt sich

Digitized by Google

$$n\frac{d\delta z}{d\varepsilon} = k + G(1.c) - \tfrac{e}{2}\lambda_1 + \{\lambda_1 - ek - eG(1.c)\}\cos\varepsilon + \lambda_2 \sin\varepsilon - \tfrac{e}{2}\lambda_1 \cos 2\varepsilon - \tfrac{e}{2}\lambda_2 \sin 2\varepsilon$$
$$+ \left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right) H(0.s)e\cos\varepsilon - H(0.c)e\sin\varepsilon - \tfrac{e}{2}H(0.s)e\cos 2\varepsilon$$
$$+ \tfrac{e}{2}H(0.c)e\sin 2\varepsilon$$

und hieraus

$$n\delta z = \left(k + G(1.c) - \tfrac{e}{2}\lambda_1\right)\varepsilon + \{\lambda_1 - ek - eG(1.c) - H(0.c)\}\sin\varepsilon - \left\{\lambda_2 - \left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right)H(0.s)\right\}\cos\varepsilon$$
$$- \tfrac{e}{4}\{\lambda_1 - \tfrac{1}{2}H(0.c)\}\sin 2\varepsilon + \tfrac{e}{4}\{\lambda_2 - \tfrac{1}{2}H(0.s)\}\cos 2\varepsilon$$
$$+ \left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right)H(0.s)\varepsilon\sin\varepsilon + H(0.c)\varepsilon\cos\varepsilon - \tfrac{e}{4}H(0.s)\varepsilon\sin 2\varepsilon$$
$$- \tfrac{e}{4}H(0.c)\varepsilon\cos 2\varepsilon$$

Eliminirt man aus dem ersten Gliede dieses Ausdrucks $\varepsilon$ durch die Gleichung

$$\varepsilon = nt + e\sin\varepsilon$$

so wird

$$n\delta z = \left(k + G(1.c) - \tfrac{e}{2}\lambda_1\right)nt + \left\{\left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right)\lambda_1 - H(0.c)\right\}\sin\varepsilon - \left\{\lambda_2 - \left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right)H(0.s)\right\}\cos\varepsilon$$
$$- \tfrac{e}{4}\{\lambda_1 - \tfrac{1}{2}H(0.c)\}\sin 2\varepsilon + \tfrac{e}{4}\{\lambda_2 - \tfrac{1}{2}H(0.s)\}\cos 2\varepsilon$$
$$+ \left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right)H(0.s)\varepsilon\sin\varepsilon + H(0.c)\varepsilon\cos\varepsilon - \tfrac{e}{4}H(0.s)\varepsilon\sin 2\varepsilon$$
$$- \tfrac{e}{4}H(0.c)\varepsilon\cos 2\varepsilon$$

Zufolge des §. 5 (II) ist in dem mit $nt$ multiplicirten Gliede dieses Ausdruckes der Coefficient von $t$ der Unterschied zwischen der wahren und der der Rechnung zu Grunde gelegten mittleren Bewegung während der Zeiteinheit, es wird also hier

$$\frac{\Delta n}{n} = k + G(1.c) - \tfrac{e}{2}\lambda_1 \qquad (12)$$

und den Entwickelungen ist in Verbindung damit der übrige Theil von $n\delta z$ zu Grunde zu legen, nemlich

$$n\delta z = \left\{\left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right)\lambda_1 - H(0.c)\right\}\sin\varepsilon - \left\{\lambda_2 - \left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right)H(0.s)\right\}\cos\varepsilon$$
$$- \tfrac{e}{4}\{\lambda_1 - \tfrac{1}{2}H(0.c)\}\sin 2\varepsilon + \tfrac{e}{4}\{\lambda_2 - \tfrac{1}{2}H(0.s)\}\cos 2\varepsilon$$
$$+ \left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right)H(0.s)\varepsilon\sin\varepsilon + H(0.c)\varepsilon\cos\varepsilon - \tfrac{e}{4}H(0.s)\varepsilon\sin 2\varepsilon - \tfrac{e}{4}H(0.c)\varepsilon\cos 2\varepsilon$$

Da unsere zu entwickelnde Bedingungsgleichung (7) so gestellt ist, dass darin $\frac{d\delta z}{dt}$ statt $n\delta z$ vorkommt, so müssen wir den dafür zu substituirenden Ausdruck durch die Differentiation des vorstehenden erlangen. Differentiiren wir diesen zuerst nach $\varepsilon$, so ist das Differential immer noch durch $1 - e\cos\varepsilon$ theilbar, und wir bekommen

$$\frac{d\delta z}{dt} = \tfrac{e}{2}\lambda_1 + \lambda_1\cos\varepsilon + \lambda_2\sin\varepsilon$$
$$+ \tfrac{e}{2}H(0.s)\varepsilon + H(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon - H(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon$$

für den im Folgenden anzuwendenden Ausdruck von $\frac{d\delta z}{dt}$.

Digitized by Google

## 24.

Um die allzu grosse Ausdehnung der Formeln zu vermeiden, wollen wir die eben entwickelten Formeln wieder theilweise in die Bedingungsgleichung substituiren, und zwar zuerst die von den willkührlichen Constanten unabhängigen Glieder derselben vornehmen und mit dem allgemeinen Gliede verbinden. Aber auch diese Glieder wollen wir zur Erlangung der möglichsten Kürze nicht sogleich vollständig aufnehmen, sondern davon die mit $\varepsilon$ multiplicirten Glieder vorläufig weglassen. Wir setzen daher jetzt mit Weglassung des zweiten allgemeinen Gliedes, welches nur Glieder derselben Form hervorbringen würde,

$$\nu = \tfrac{1}{2}\,\Pi(1.c)\cos\varepsilon + \tfrac{1}{2}\,\Pi(1.s)\sin\varepsilon + \tfrac{1}{2}\,\frac{\Sigma 1D(i-l)}{i-i'\mu}\cos(i,i')$$

und bezeichnen die correspondirenden Glieder in $X$ mit

$$\begin{aligned} X = \quad & -B(1.c)\sin(-\eta+\varepsilon) \\ & +A(0.s) \quad +B(1.s)\cos(-\eta+\varepsilon) \\ & -A(1.c)\sin\varepsilon - B(2.c)\sin(-\eta+2\varepsilon) - C(0.c)\sin\eta \\ & +A(1.s)\cos\varepsilon + B(2.s)\cos(-\eta+2\varepsilon) + C(0.s)\cos\eta \\ & +A(i)\sin(l\eta+(i,i')) \end{aligned}$$

Zufolge der Bedingungsgleichung $X = -2\overline{T}$ und der im vor. Art. eingeführten Bezeichnung erhalten wir hier speciell

$$(13) \qquad \begin{cases} A(0.s)+B(1.s) = \quad eH(0.s) \\ A(1.c)+B(2.c)+C(0.c) = -2\Pi(1.c) \\ A(1.s)+B(2.s)+C(0.s) = -2\Pi(1.s) \end{cases}$$

## 25.

Multiplicirt man nun $\nu$ mit $X$, nimmt dabei blos auf die Producte der speciellen Glieder mit den allgemeinen Gliedern Rücksicht und integrirt, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} N = & \tfrac{1}{4}\Big\{A(1.c)\,\frac{\Sigma 1D(i-l-1)}{i-1-i'\mu} - A(1.c)\,\frac{\Sigma 1D(i-l+1)}{i+1-i'\mu}\Big\}\frac{\cos(i,i')}{i-i'\mu} \\ & + \tfrac{1}{4}\Big\{B(2.c)\,\frac{\Sigma 1D(i-l-1)}{i-1-i'\mu} + B(1.c)\,\frac{\Sigma 1D(i-l)}{i-i'\mu} - C(0.c)\,\frac{\Sigma 1D(i-l+1)}{i+1-i'\mu}\Big\}\frac{\cos(-\eta+(i+1,i'))}{i+1-i'\mu} \\ & + \tfrac{1}{4}\Big\{C(0.c)\,\frac{\Sigma 1D(i-l-1)}{i-1-i'\mu} - B(1.c)\,\frac{\Sigma 1D(i-l)}{i-i'\mu} - B(2.c)\,\frac{\Sigma 1D(i-l+1)}{i+1-i'\mu}\Big\}\frac{\cos(\eta+(i-1,i'))}{i-1-i'\mu} \\ & + \tfrac{1}{4}\Big\{A(1.s)\,\frac{\Sigma 1D(i-l-1)}{i-1-i'\mu} + 2A(0.s)\,\frac{\Sigma 1D(i-l)}{i-i'\mu} + A(1.s)\,\frac{\Sigma 1D(i-l+1)}{i+1-i'\mu}\Big\}\frac{\sin(i,i')}{i-i'\mu} \\ & + \tfrac{1}{4}\Big\{B(2.s)\,\frac{\Sigma 1D(i-l-1)}{i-1-i'\mu} + B(1.s)\,\frac{\Sigma 1D(i-l)}{i-i'\mu} + C(0.s)\,\frac{\Sigma 1D(i-l+1)}{i+1-i'\mu}\Big\}\frac{\sin(-\eta+(i+1,i'))}{i+1-i'\mu} \\ & + \tfrac{1}{4}\Big\{C(0.s)\,\frac{\Sigma 1D(i-l-1)}{i-1-i'\mu} + B(1.s)\,\frac{\Sigma 1D(i-l)}{i-i'\mu} + B(2.s)\,\frac{\Sigma 1D(i-l+1)}{i+1-i'\mu}\Big\}\frac{\sin(\eta+(i-1,i'))}{i-1-i'\mu} \end{aligned}$$

Digitized by Google

$$-\tfrac{1}{4}\Pi(1.c)\{A(i-1)+A(i+1)\}\tfrac{\cos(l\eta+(i,i'))}{i-i'\mu}$$
$$\tfrac{1}{4}\Pi(1.s)\{A(i-1)-A(i+1)\}\tfrac{\sin(l\eta+(i,i'))}{i-i'\mu}$$

und aus diesem Ausdruck ergiebt sich leicht zuerst, dass

$$\begin{aligned}\overline{N}-\int\left(\tfrac{d\overline{N}}{d\eta}\right)d\varepsilon = {}& \tfrac{1}{4}\{A(1.c)+B(2.c)+C(0.c)\}\left\{\tfrac{\Sigma lD(i-l-1)}{i-1-i'\mu}-\tfrac{\Sigma lD(i-l+1)}{i+1-i'\mu}\right\}\tfrac{\cos(i,i')}{i-i'\mu}\\ &+\tfrac{1}{4}\{A(1.s)+B(2.s)+C(0.s)\}\left\{\tfrac{\Sigma lD(i-l-1)}{i-1-i'\mu}+\tfrac{\Sigma lD(i-l+1)}{i+1-i'\mu}\right\}\tfrac{\sin(i,i')}{i-i'\mu}\\ &+\tfrac{1}{4}\{A(0.s)+B(1.s)\}\tfrac{\Sigma lD(i-l)}{(i-i'\mu)^2}\sin(i,i')\\ &-\tfrac{1}{4}\Pi(1.c)\,\Sigma\{A(i-l-1)+A(i-l+1)\}\tfrac{\cos(i,i')}{i-i'\mu}\\ &-\tfrac{1}{4}\Pi(1.s)\,\Sigma\{A(i-l-1)-A(i-l+1)\}\tfrac{\sin(i,i')}{i-i'\mu}\end{aligned}$$

wird. Wenden wir hierauf sowohl die allgemeinen Bedingungsgleichungen (10) wie die speciellen Bedingungsgleichungen (13) an, so erhalten wir

$$\begin{aligned}\overline{N}-\int\left(\tfrac{d\overline{N}}{d\eta}\right)d\varepsilon = {}& -\tfrac{1}{4}\Pi(1.c)\left\{\tfrac{\Sigma lD(i-l-1)}{i-1-i'\mu}-\tfrac{\Sigma lD(i-l+1)}{i+1-i'\mu}\right\}\tfrac{\cos(i,i')}{i-i'\mu}\\ &+\tfrac{1}{4}\Pi(1.c)\{\Sigma(i-l-1-i'\mu)D(i-l-1)+\Sigma(i-l+1-i'\mu)D(i-l+1)\}\tfrac{\cos(i,i)}{i-i'\mu}\\ &-\tfrac{1}{4}\Pi(1.s)\left\{\tfrac{\Sigma lD(i-l-1)}{i-1-i'\mu}+\tfrac{\Sigma lD(i-l+1)}{i+1-i'\mu}\right\}\tfrac{\sin(i,i')}{i-i'\mu}\\ &+\tfrac{1}{4}\Pi(1.s)\{\Sigma(i-l-1-i'\mu)D(i-l-1)-\Sigma(i-l+1-i'\mu)D(i-l+1)\}\tfrac{\sin(i,i')}{i-i'\mu}\\ &+\tfrac{e}{2}H(0.s)\ \tfrac{\Sigma lD(i-l)}{(i-i'\mu)^2}\sin(i,i')\end{aligned}$$

womit wieder die beiden ersten Glieder der Bedingungsgleichung (7) entwickelt sind.

## 26.

Für die Entwickelung der übrigen Glieder haben wir aus dem Vorhergehenden

$$\begin{aligned}\left(\tfrac{d\overline{W}}{d\eta}\right) = {}& eH(0.s)+\{\Pi(1.c)-H(0.c)\}\sin\varepsilon-\{\Pi(1.s)-H(0.s)\}\cos\varepsilon\\ &+\Sigma lD(i-l)\sin(i,i')\\ \tfrac{d\delta z}{dt} = {}& -\Sigma D(i-l)\cos(i,i')\end{aligned}$$

$$\nu-\delta\tfrac{h_0}{h}+\tfrac{\Delta n}{n} = -\tfrac{1}{4}\Pi(1.c)\cos\varepsilon-\tfrac{1}{4}\Pi(1.s)\sin\varepsilon+\tfrac{\Sigma(i-\frac{1}{2}l-i'\mu)D(i-l)}{i-i'\mu}\cos(i,i')$$

$$2\nu = \Pi(1.c)\cos\varepsilon+\Pi(1.s)\sin\varepsilon+\tfrac{\Sigma lD(i-l)}{i-i'\mu}\cos(i,i')$$

woraus man leicht

Digitized by Google

$$\int\left(\frac{dW}{d\eta}\right)\frac{dd\varepsilon}{dt} = \tfrac{1}{2}\Pi(1.c)\,\Sigma'\{D(i-l-1)-D(i-l+1)\}\frac{\cos(i,i')}{i-i'\mu}$$
$$+\tfrac{1}{2}\Pi(1.s)\,\Sigma'\{D(i-l-1)+D(i-l+1)\}\frac{\sin(i,i')}{i-i'\mu}$$
$$-\tfrac{1}{2}H(0.s)\,\Sigma'\{D(i-l-1)+2eD(i-l)+D(i-l+1)\}\frac{\sin(i,i')}{i-i'\mu}$$
$$-\tfrac{1}{2}H(0.c)\,\Sigma'\{D(i-l-1)-D(i-l+1)\}\frac{\cos(i,i')}{i-i'\mu}$$

und

$$2\nu\left(\nu-\delta\frac{h_0}{h}+\frac{\Delta n}{n}\right)=$$
$$\tfrac{1}{2}\Pi(1.c)\,\Sigma'\left\{\frac{(i-l-1-i'\mu)\,D(i-l-1)}{i-1-i'\mu}+\frac{(i-l+1-i'\mu)\,D(i-l+1)}{i+1-i'\mu}\right\}\cos(i,i')$$
$$+\Pi(\tfrac{1}{2}1.s)\,\Sigma'\left\{\frac{(i-l-1-i'\mu)\,D(i-l-1)}{i-1-i'\mu}-\frac{(i-l+1-i'\mu)\,D(i-l+1)}{i+1-i'\mu}\right\}\sin(i,i')$$

erhält. Substituirt man nun diese Entwickelungen in die Bedingungsgleichung (7), reducirt, und nennt die linke Seite derselben $B$, so findet man, dass

$$B=-\tfrac{1}{2}H(0.c)\,\Sigma'\{D(i-l-1)-D(i-l+1)\}\frac{\cos(i,i')}{i-i'\mu}$$
$$-\tfrac{1}{2}H(0.s)\,\Sigma'\{D(i-l-1)+D(i-l+1)\}\frac{\sin(i,i')}{i-i'\mu}$$
$$-eH(0.s)\,\frac{\Sigma'(i-\frac{1}{2}l-i'\mu)\,D(i-l)}{(i-i'\mu)^2}\sin(i,i')$$

In diesem Falle ist die Bedingungsgleichung also nicht identisch Null geworden, und die Glieder, welche im vorstehenden Ausdruck übrig geblieben sind, müssen im folgenden diejenigen erhalten, gegen welche sie sich aufheben.

## 27.

Gehen wir nun zu den Gliedern über, die mit $\varepsilon$ multiplicirt sind, und verbinden auch diese mit den allgemeinen Gliedern, so dürfen wir für das Product $X\nu$ setzen

$$\nu=-\frac{e}{2}H(0.s)\varepsilon-\tfrac{1}{2}H(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon+\tfrac{1}{2}H(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon$$
$$X=\quad A(i)\sin(l\eta+(i,i'))$$

da die Verbindung des allgemeinen Gliedes von $\nu$ mit den obigen speciellen Gliedern von $X$ keine mit $\varepsilon$ multiplicirten Glieder hervorbringen kann. Wir bekommen nun aus den vorstehenden Ausdrücken

Digitized by Google

$$N = \tfrac{1}{4} H(0.s)\{A(i-1)+2eA(i)+A(i+1)\}\tfrac{\varepsilon\cos(l\eta+(i,i'))}{i-i'\mu}$$
$$-\tfrac{1}{4} H(0.c)\{A(i-1)-A(i+1)\}\tfrac{\varepsilon\sin(l\eta+(i,i'))}{i-i'\mu}$$
$$-\tfrac{1}{4} H(0.s)\{A(i-1)+2eA(i)+A(i+1)\}\tfrac{\sin(l\eta+(i,i'))}{(i-i'\mu)^2}$$
$$-\tfrac{1}{4} H(0.c)\{A(i-1)-A(i+1)\}\tfrac{\cos(l\eta+(i,i'))}{(i-i'\mu)^2}$$

hieraus

$$\overline{N}-\int\left(\frac{dN}{d\eta}\right)d\varepsilon = \tfrac{1}{4} H(0.s)\,\Sigma'\{A(i-l-1)+2eA(i-l)+A(i-l+1)\}\tfrac{\varepsilon\cos(i,i')}{i-i'\mu}$$
$$-\tfrac{1}{4} H(0.c)\,\Sigma'\{A(i-l-1)-A(i-l+1)\}\tfrac{\varepsilon\sin(i,i')}{i-i'\mu}$$
$$-\tfrac{1}{4} H(0.s)\,\Sigma'\{A(i-l-1)+2eA(i-l)+A(i-l+1)\}\tfrac{\sin(i,i')}{(i-i'\mu)^2}$$
$$-\tfrac{1}{4} H(0.c)\,\Sigma'\{A(i-l-1)-A(i-l+1)\}\tfrac{\cos(i,i')}{(i-i'\mu)^2}$$

und nach Anwendung der Gleichungen (10)

$$\overline{N}-\int\left(\frac{dN}{d\eta}\right)d\varepsilon = -\tfrac{1}{4} H(0.s)\,\Sigma\{(i-l-1-i'\mu)D(i-l-1)+2e(i-l-i'\mu)D(i-l)+(i-l+1-i'\mu)D(i-l+1)\}\tfrac{\varepsilon\cos(i,i')}{i-i'\mu}$$
$$+\tfrac{1}{4} H(0.c)\,\Sigma\{(i-l-1-i'\mu)D(i-l-1)-(i-l+1-i'\mu)D(i-l+1)\}\tfrac{\varepsilon\sin(i,i')}{i-i'\mu}$$
$$+\tfrac{1}{4} H(0.s)\,\Sigma\{(i-l-1-i'\mu)D(i-l-1)+2e(i-l-i'\mu)D(i-l)+(i-l+1-i'\mu)D(i-l+1)\}\tfrac{\sin(i,i')}{(i-i'\mu)^2}$$
$$+\tfrac{1}{4} H(0.c)\,\Sigma\{(i-l-1-i'\mu)D(i-l-1)-(i-l+1-i'\mu)D(i-l+1)\}\tfrac{\cos(i,i')}{(i-i'\mu)^2}$$

Für die übrigen Producte wird jetzt

$$\left(\frac{dW}{d\eta}\right) = -H(0.s)\,\varepsilon\sin\varepsilon - H(0.c)\,\varepsilon\cos\varepsilon + \Sigma' lD(i-l)\sin(i,i')$$
$$\frac{d\delta z}{dt} = \frac{e}{2} H(0.s)\,\varepsilon + H(0.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon - H(0.c)\,\varepsilon\sin\varepsilon - \Sigma D(i-l)\cos(i,i')$$
$$\nu - \delta\tfrac{h_0}{h} + \tfrac{\Delta n}{n} = -\tfrac{1}{4} H(0.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon + \tfrac{1}{4} H(0.c)\,\varepsilon\sin\varepsilon + \tfrac{\Sigma(i-\frac{1}{2}l-i'\mu)D(i-l)}{i-i'\mu}\cos(i,i')$$
$$2\nu = -eH(0.s)\,\varepsilon - H(0.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon + H(0.c)\,\varepsilon\sin\varepsilon + \tfrac{\Sigma lD(i-l)}{i-i'\mu}\cos(i,i')$$

und hieraus ergiebt sich

$$\int\left(\frac{dW}{d\eta}\right)\frac{d\delta z}{dt}d\varepsilon = -\tfrac{1}{4} H(0.s)\,\Sigma'\{(l+1)D(i-l-1)+elD(i-l)+(l-1)D(i-l+1)\}\tfrac{\varepsilon\cos(i,i')}{i-i'\mu}$$
$$+\tfrac{1}{4} H(0.c)\,\Sigma'\{(l+1)D(i-l-1)-(l-1)D(i-l+1)\}\tfrac{\varepsilon\sin(i,i')}{i-i'\mu}$$
$$+\tfrac{1}{4} H(0.s)\,\Sigma'\{(l+1)D(i-l-1)+elD(i-l)+(l-1)D(i-l+1)\}\tfrac{\sin(i,i')}{(i-i'\mu)^2}$$
$$+\tfrac{1}{4} H(0.c)\,\Sigma'\{(l+1)D(i-l-1)-(l-1)D(i-l+1)\}\tfrac{\cos(i,i'\mu)}{(i-i')^2}$$

$$2\nu\left(\nu-\delta\tfrac{h_0}{h}+\tfrac{\Delta n}{n}\right) = -\tfrac{1}{4} H(0.s)\,\Sigma'\{D(i-l-1)+D(i-l+1)\}\varepsilon\cos(i,i')$$
$$+\tfrac{1}{4} H(0.c)\,\Sigma'\{D(i-l-1)-D(i-l+1)\}\varepsilon\sin(i,i')$$
$$-eH(0.s)\tfrac{\Sigma(i-\frac{1}{2}l-i'\mu)D(i-l)}{i-i'\mu}\varepsilon\cos(i,i')$$

Digitized by Google

Substituiren wir diese Entwickelungen in (7) und nennen die linke Seite dieser Gleichung jetzt $B'$, so erhalten wir

$$\begin{aligned} B' = & \tfrac{1}{2} H(0.s) \Sigma' \{ D(i-l-1) + D(i-l+1) \} \tfrac{\sin(i,i')}{i-i'\mu} \\ & + \tfrac{1}{2} H(0.c) \Sigma' \{ D(i-l-1) - D(i-l+1) \} \tfrac{\cos(i,i')}{i-i'\mu} \\ & + e H(0.s) \tfrac{\Sigma(i-\frac{1}{2}l-i'\mu)\, D(i-l)}{(i-i'\mu)^2} \sin(i,i'') \end{aligned}$$

Vergleicht man dieses Resultat mit dem des vorhergehenden Artikels, so findet man $B + B' = 0$

Die Bedingungsgleichung (7) ist also auch für die Summe der in diesem und dem vor. Art. berücksichtigten unregelmässigen Glieder identisch Null.

28.

Um diese Entwickelungen zu vervollständigen, müssen wir auch die Glieder betrachten, die aus den Producten der unregelmässigen Glieder in einander entstehen. Sei daher jetzt

$$\begin{aligned} \nu = & \quad \tfrac{1}{2} \Pi(1.c) \cos\varepsilon + \tfrac{1}{2} \Pi(1.s) \sin\varepsilon \\ & - \tfrac{e}{2} H(0.s)\varepsilon - \tfrac{1}{2} H(0.s)\varepsilon \cos\varepsilon + \tfrac{1}{2} H(0.c)\varepsilon \sin\varepsilon \\ X = & \quad - B(1.c) \sin(-\eta+\varepsilon) \\ & + A(0.s) \quad + B(1.s) \cos(-\eta+\varepsilon) \\ & - A(1.c) \sin\varepsilon - B(2.c) \sin(-\eta+2\varepsilon) - C(0.c) \sin\eta \\ & + A(1.s) \cos\varepsilon + B(2.s) \cos(-\eta+2\varepsilon) + C(0.s) \cos\eta \end{aligned}$$

woraus

$$\begin{aligned} \overline{N} = & \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{8}\Pi(1.c)B(1.c) - \Pi(1.s)[\frac{1}{4}A(0.s) + \frac{1}{8}B(1.s)] \\ -H(0.s)[\frac{1}{4}A(0.s) + \frac{1}{16}B(1.s) + \frac{e}{2}A(1.s) + \frac{e}{8}B(2.s)] + \frac{1}{16}H(0.c)B(1.c) \end{matrix} \right\} \cos\varepsilon \\ & + \left\{ \begin{matrix} \Pi(1.c)[\frac{1}{8}A(1.c) + \frac{1}{16}B(2.c) + \frac{1}{4}C(0.c)] - \Pi(1.s)[\frac{1}{8}A(0.s) + \frac{1}{16}B(2.s) + \frac{1}{4}C(0.s)] \\ -H(0.s)[\frac{1}{16}A(1.s) + \frac{1}{32}B(2.s) + \frac{1}{4}C(0.s)] + H(0.c)[\frac{1}{16}A(1.c) + \frac{1}{32}B(2.c) + \frac{1}{4}C(0.c)] \end{matrix} \right\} \cos 2\varepsilon \\ & + \left\{ \begin{matrix} \Pi(1.c)[\frac{1}{8}A(0.s) + \frac{1}{8}B(1.s)] + \frac{1}{8}\Pi(1.s)B(1.c) \\ +H(0.s)[\frac{1}{16}B(1.c) + \frac{e}{8}A(1.c) + \frac{e}{8}B(2.c)] + H(0.c)[\frac{1}{8}A(0.s) + \frac{1}{16}B(1.s)] \end{matrix} \right\} \sin\varepsilon \\ & + \left\{ \begin{matrix} \Pi(1.c)[\frac{1}{8}A(1.s) + \frac{1}{16}B(2.s) + \frac{1}{4}C(0.s)] + \Pi(1.s)[\frac{1}{8}A(1.c) + \frac{1}{16}B(2.c) + \frac{1}{4}C(0.c)] \\ +H(0.s)[\frac{1}{16}A(1.c) + \frac{1}{32}B(2.c) + \frac{1}{4}C(0.c)] + H(0.c)[\frac{1}{16}A(1.s) + \frac{1}{32}B(2.s) + \frac{1}{4}C(0.s)] \end{matrix} \right\} \sin 2\varepsilon \\ & + \left\{ \begin{matrix} \frac{1}{4}\Pi(1.c)A(1.s) - \frac{1}{4}\Pi(1.s)A(1.c) \\ -H(0.s)[\frac{e}{4}B(1.c) + \frac{1}{4}B(2.c) - \frac{1}{4}C(0.c)] + H(0.c)[\frac{1}{4}B(2.s) - \frac{1}{4}C(0.s)] \end{matrix} \right\} \varepsilon \end{aligned}$$

Digitized by Google

$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}H(1.c)B(1.s)-\frac{1}{2}H(1.s)B(1.c)\\-H(0.s)\left[\frac{1}{8}B(1.c)+\frac{e}{2}A(1.c)+\frac{e}{4}B(2.c)\right]-H(0.c)\left[\frac{1}{2}A(0.s)+\frac{1}{8}B(1.s)\right]\end{array}\right\}\varepsilon\cos\varepsilon$$

$$-\left\{H(0.s)\left[\frac{1}{8}A(1.c)+\frac{1}{12}B(2.c)+\frac{1}{4}C(0.c)\right]+H(0.c)\right]\frac{1}{8}A(1.s)+\frac{1}{12}B(2.s)+\frac{1}{4}C(0.s)]\}\varepsilon\cos 2\varepsilon$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}H(1.c)B(1.c)+\frac{1}{2}H(1.s)B(1.s)\\-H(0.s)\left[\frac{1}{2}A(0.s)+\frac{1}{8}B(1.s)+\frac{e}{8}A(1.s)+\frac{e}{4}B(2.s)\right]+\frac{1}{8}H(0.c)B(1.c)\end{array}\right\}\varepsilon\sin\varepsilon$$

$$-\left\{H(0.s)\left[\frac{1}{8}A(1.s)+\frac{1}{12}B(2.s)+\frac{1}{4}C(0.s)\right]-H(0.c)\left[\frac{1}{4}A(1.c)+\frac{1}{12}B(2.c)+\frac{1}{4}C(0.c)\right]\right\}\varepsilon\sin 2\varepsilon$$

$$-\left\{H(0.s)\left[\frac{e}{4}A(0.s)+\frac{1}{8}A(1.s)\right]+\frac{1}{8}H(0.c)A(1.c)\right\}\varepsilon^2$$

$$-\left\{H(0.s)\left[\frac{1}{8}B(1.s)+\frac{e}{4}C(0.s)\right]+\frac{1}{8}H(0.c)B(1.c)\right\}\varepsilon^2\cos\varepsilon$$

$$-\left\{H(0.s)\left[\frac{1}{8}B(1.c)-\frac{e}{4}C(0.c)\right]-\frac{1}{8}H(0.c)B(1.s)\right\}\varepsilon^2\sin\varepsilon$$

und

$$\int\left(\frac{dN}{d\eta}\right)d\varepsilon=\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{8}H(1.c)B(1.c)+\frac{3}{8}H(1.s)B(1.s)\\+H(0.s)\left[\frac{7}{16}B(1.s)+\frac{3e}{8}B(2.s)+\frac{e}{2}C(0.s)\right]+\frac{1}{16}H(0.c)B(1.c)\end{array}\right\}\cos\varepsilon$$

$$+\left\{\begin{array}{l}-H(1.c)\left[\frac{1}{24}B(2.c)-\frac{1}{8}C(0.c)\right]+H(1.s)\left[\frac{1}{24}B(2.s)-\frac{1}{8}C(0.s)\right]\\+H(0.s)\left[\frac{7}{12}\frac{5}{4}B(2.s)-\frac{3}{16}C(0.s)\right]-H(0.c)\left[\frac{7}{12}\frac{5}{4}B(2.c)-\frac{3}{16}C(0.c)\right]\end{array}\right\}\cos 2\varepsilon$$

$$+\left\{\begin{array}{l}-\frac{3}{8}H(1.c)B(1.s)+\frac{1}{8}H(1.s)B(1.c)\\+H(0.s)\left[\frac{1}{16}B(1.c)-\frac{3e}{8}B(2.c)-\frac{e}{2}C(0.c)\right]-\frac{7}{16}H(0.c)B(1.s)\end{array}\right\}\sin\varepsilon$$

$$-\left\{\begin{array}{l}H(1.c)\left[\frac{1}{24}B(2.s)-\frac{1}{8}C(0.s)\right]+H(1.s)\left[\frac{1}{24}B(2.c)-\frac{1}{8}C(0.c)\right]\\+H(0.s)\left[\frac{1}{12}\frac{5}{4}B(2.c)-\frac{3}{16}C(0.c)\right]+H(0.c)\left[\frac{1}{12}\frac{5}{4}B(2.s)-\frac{3}{16}C(0.s)\right]\end{array}\right\}\sin 2\varepsilon$$

$$+\left\{\begin{array}{l}-\frac{1}{8}H(1.c)\left[B(2.s)+C(0.s)\right]+\frac{1}{8}H(1.s)\left[B(2.c)+C(0.c)\right]\\+H(0.s)\left[-\frac{e}{2}B(1.c)-\frac{1}{8}B(2.c)+\frac{1}{4}C(0.c)\right]+H(0.c)\left[\frac{1}{8}B(2.s)-\frac{1}{4}C(0.s)\right]\end{array}\right\}\varepsilon$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}H(1.c)B(1.s)-\frac{1}{2}H(1.s)B(1.c)\\+H(0.s)\left[-\frac{1}{8}B(1.c)+\frac{e}{4}B(2.c)+\frac{e}{2}C(0.c)\right]+\frac{1}{8}H(0.c)B(1.s)\end{array}\right\}\varepsilon\cos\varepsilon$$

$$+\left\{H(0.s)\left[\frac{1}{24}B(2.c)-\frac{1}{8}C(0.c)\right]+H(0.c)\left[\frac{1}{24}B(2.s)-\frac{1}{8}C(0.s)\right]\right\}\varepsilon\cos 2\varepsilon$$

$$+\left\{\begin{array}{l}\frac{1}{2}H(1.c)B(1.c)+\frac{1}{2}H(1.s)B(1.s)\\+H(0.s)\left[\frac{1}{8}B(1.s)+\frac{e}{4}B(2.s)+\frac{e}{2}C(0.s)\right]+\frac{1}{8}H(0.c)B(1.c)\end{array}\right\}\varepsilon\sin\varepsilon$$

$$+\left\{H(0.s)\left[\frac{1}{24}B(2.s)-\frac{1}{8}C(0.s)\right]-H(0.c)\left[\frac{1}{24}B(2.c)-\frac{1}{8}C(0.c)\right]\right\}\varepsilon\sin 2\varepsilon$$

$$+\left\{H(0.s)\left[\frac{e}{4}B(1.s)+\frac{1}{8}B(2.s)+\frac{1}{4}C(0.s)\right]+H(0.c)\left[\frac{1}{8}B(2.c)+\frac{1}{4}C(0.c)\right]\right\}\varepsilon^2$$

$$-\left\{H(0.s)\left[\frac{1}{8}B(1.s)+\frac{e}{4}C(0.s)\right]+\frac{1}{8}H(0.c)B(1.c)\right\}\varepsilon^2\cos\varepsilon$$

$$-\left\{H(0.s)\left[\frac{1}{8}B(1.c)-\frac{e}{4}C(0.c)\right]-\frac{1}{8}H(0.c)B(1.s)\right\}\varepsilon^2\sin\varepsilon$$

hervorgeht. Mit Zuziehung der Gleichungen (13) ergiebt sich hieraus

Digitized by Google

$$\overline{N}-\int\left(\frac{d\overline{N}}{d\eta}\right)d\varepsilon = \left\{\tfrac{e}{2}H(0.s)\Pi(1.s)-\tfrac{e}{2}H(0.s)H(0.s)\right\}\cos\varepsilon$$
$$+\begin{Bmatrix}-\frac{1}{4}\Pi(1.c)\Pi(1.c)+\frac{1}{4}\Pi(1.s)\Pi(1.s)\\+\frac{1}{8}H(0.s)\Pi(1.s)-\frac{1}{8}H(0.c)\Pi(1.c)\end{Bmatrix}\cos 2\varepsilon$$
$$-\left\{\tfrac{e}{2}H(0.s)\Pi(1.c)-\tfrac{e}{2}H(0.c)H(0.s)\right\}\sin\varepsilon$$
$$-\left\{\tfrac{1}{2}\Pi(1.c)\Pi(1.s)+\tfrac{1}{8}H(0.s)\Pi(1.c)+\tfrac{1}{8}H(0.c)\Pi(1.s)\right\}\sin 2\varepsilon$$
$$+\left\{eH(0.s)\Pi(1.c)-\tfrac{e}{2}H(0.c)H(0.s)\right\}\varepsilon\cos\varepsilon$$
$$+\left\{\tfrac{1}{4}H(0.s)\Pi(1.c)+\tfrac{1}{4}H(0.c)\Pi(1.s)\right\}\varepsilon\cos 2\varepsilon$$
$$-\left\{\tfrac{e}{2}H(0.s)H(0.s)-eH(0.s)\Pi(1.s)\right\}\varepsilon\sin\varepsilon$$
$$+\left\{\tfrac{1}{4}H(0.s)\Pi(1.s)-\tfrac{1}{4}H(0.c)\Pi(1.c)\right\}\varepsilon\sin 2\varepsilon$$
$$-\left\{\tfrac{e^2}{4}H(0.s)H(0.s)-\tfrac{1}{4}H(0.s)\Pi(1.s)-\tfrac{1}{4}H(0.c)\Pi(1.c)\right\}\varepsilon^2$$

Die Factoren der übrigen Producte sind jetzt

$$\left(\frac{d\overline{W}}{d\eta}\right) = eH(0.s) + \left\{\Pi(1.c)-H(0.c)\right\}\sin\varepsilon - \left\{\Pi(1.s)-H(0.s)\right\}\cos\varepsilon$$
$$- H(0.s)\,\varepsilon\sin\varepsilon \qquad - H(0.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon$$

$$\frac{d\delta z}{dt} = \tfrac{e}{2}H(0.s)\,\varepsilon + H(0.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon - H(0.c)\,\varepsilon\sin\varepsilon$$

$$\left(\nu-\partial\frac{h_0}{h}+\frac{\partial n}{n}\right) = -\tfrac{1}{2}\Pi(1.c)\cos\varepsilon-\tfrac{1}{2}\Pi(1.s)\sin\varepsilon$$
$$-\tfrac{1}{4}H(0.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon+\tfrac{1}{4}H(0.c)\,\varepsilon\sin\varepsilon$$

$$2\nu = \Pi(1.c)\cos\varepsilon+\Pi(1.s)\sin\varepsilon$$
$$-eH(0.s)\,\varepsilon - H(0.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon+H(0.c)\,\varepsilon\sin\varepsilon$$

und diese geben

$$\int\left(\frac{d\overline{W}}{d\eta}\right)\frac{d\delta z}{dt}d\varepsilon = -\left\{\tfrac{e}{2}H(0.s)\Pi(1.s)-\tfrac{e}{2}H(0.s)H(0.s)\right\}\cos\varepsilon$$
$$-\left\{\tfrac{1}{8}H(0.s)\Pi(1.s)-\tfrac{1}{8}H(0.c)\Pi(1.c)\right\}\cos 2\varepsilon$$
$$+\left\{\tfrac{e}{2}H(0.s)\Pi(1.c)-\tfrac{e}{2}H(0.s)H(0.c)\right\}\sin\varepsilon$$
$$+\left\{\tfrac{1}{8}H(0.s)\Pi(1.c)+\tfrac{1}{8}H(0.c)\Pi(1.s)\right\}\sin 2\varepsilon$$
$$-\left\{\tfrac{e}{2}H(0.s)\Pi(1.c)-\tfrac{e}{2}H(0.s)H(0.c)\right\}\varepsilon\cos\varepsilon$$
$$-\left\{\tfrac{1}{4}H(0.s)\Pi(1.c)+\tfrac{1}{4}H(0.c)\Pi(1.s)\right\}\varepsilon\cos 2\varepsilon$$
$$-\left\{\tfrac{e}{2}H(0.s)\Pi(1.s)-\tfrac{e}{2}H(0.s)H(0.s)\right\}\varepsilon\sin\varepsilon$$
$$-\left\{\tfrac{1}{4}H(0.s)\Pi(1.s)-\tfrac{1}{4}H(0.c)\Pi(1.c)\right\}\varepsilon\sin 2\varepsilon$$
$$-\begin{Bmatrix}\frac{1}{4}H(0.s)\Pi(1.s)+\frac{1}{4}H(0.c)\Pi(1.c)\\-\frac{1}{4}(1+e^2)H(0.s)H(0.s)-\frac{1}{4}H(0.c)H(0.c)\end{Bmatrix}\varepsilon^2$$
$$+\tfrac{e}{2}H(0.s)H(0.s)\,\varepsilon^2\cos\varepsilon$$
$$+\left\{\tfrac{1}{4}H(0.s)H(0.s)-\tfrac{1}{4}H(0.c)H(0.c)\right\}\varepsilon^2\cos 2\varepsilon$$
$$-\tfrac{e}{2}H(0.s)H(0.c)\,\varepsilon^2\sin\varepsilon$$
$$-\tfrac{1}{4}H(0.s)H(0.c)\,\varepsilon^2\sin 2\varepsilon$$

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
2\nu\left(\nu-\delta\tfrac{h_0}{h}+\tfrac{dn}{n}\right) = &-\{\tfrac{1}{4}II(1.c)II(1.c)-\tfrac{1}{4}II(1.s)II(1.s)\}\cos 2\varepsilon\\
&-\tfrac{1}{4}II(1.c)II(1.s)\sin 2\varepsilon\\
&+\tfrac{e}{2}H(0.s)II(1.c)\,\varepsilon\cos\varepsilon\\
&+\tfrac{e}{2}H(0.s)II(1.s)\,\varepsilon\sin\varepsilon\\
&+\{\tfrac{1}{4}H(0.s)H(0.s)+\tfrac{1}{4}H(0.c)H(0.c)\}\,\varepsilon^2\\
&+\tfrac{e}{2}H(0.s)H(0.s)\,\varepsilon^2\cos\varepsilon\\
&+\{\tfrac{1}{4}H(0.s)H(0.s)-\tfrac{1}{4}H(0.c)H(0.c)\}\,\varepsilon^2\cos 2\varepsilon\\
&-\tfrac{e}{2}H(0.s)H(0.c)\,\varepsilon^2\sin\varepsilon\\
&-\tfrac{1}{4}H(0.s)H(0.c)\,\varepsilon^2\sin 2\varepsilon
\end{aligned}
$$

Substituirt man diese Entwickelungen in die Bedingungsgleichung (7), so wird sie wieder identisch Null, und hiemit sind alle Combinationen derjenigen Glieder, welche die willkührlichen Constanten nicht enthalten, in Betracht gezogen.

In Bezug auf die zuletzt entwickelte Combination ist zu bemerken, dass zufolge der Erklärung des Art. 20 auch die hier in den Integralen und Producten entstandenen constanten Glieder ausser Betracht gelassen werden mussten.

## 29.

Gehen wir jetzt zu den Gliedern über, die von den willkührlichen Constanten abhängen, und verbinden sie zuerst mit den allgemeinen Gliedern, dann müssen wir um $X\nu$ zu erhalten,

$$\nu = C_0 - \tfrac{1}{2}\lambda_1\cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}\lambda_2\sin\varepsilon$$
$$X = A(i)\sin(l\eta+(i,i'))$$

setzen, und erhalten damit

$$
\begin{aligned}
N = &-C_0\tfrac{A(i)}{i-i'\mu}\cos(l\eta+(i,i'))\\
&+\tfrac{\frac{1}{2}\lambda_1}{i-i'\mu}\{A(i-1)+A(i+1)\}\cos(l\eta+(i,i'))\\
&-\tfrac{\frac{1}{2}\lambda_2}{i-i'\mu}\{A(i-1)-A(i+1)\}\sin(l\eta+(i,i'))
\end{aligned}
$$

woraus nach Berücksichtigung der Gleichungen (10)

$$
\begin{aligned}
\overline{N}-\int\left(\tfrac{d\overline{N}}{d\eta}\right)d\varepsilon = &2C_0\tfrac{\Sigma(i-l-i'\mu)D(i-l)}{i-i'\mu}\cos(i,i')\\
&-\tfrac{\frac{1}{2}\lambda_1}{i-i'\mu}\Sigma'\{(i-l-1-i'\mu)D(i-l-1)+(i-l+1-i'\mu)D(i-l+1)\}\cos(i,i')\\
&+\tfrac{\frac{1}{2}\lambda_2}{i-i'\mu}\Sigma'\{(i-l-1-i'\mu)D(i-l-1)-(i-l+1-i'\mu)D(i-l+1)\}\sin(i,i')
\end{aligned}
$$

hervorgeht. Für die übrigen Producte wird in diesem Falle

Digitized by Google

$$\left(\frac{dW}{d\eta}\right) = -\lambda_1 \sin\varepsilon + \lambda_2 \cos\varepsilon + \Sigma' l D(i-l) \sin(i,i')$$

$$\frac{d\delta z}{dt} = \tfrac{e}{2}\lambda_1 + \lambda_1 \cos\varepsilon + \lambda_2 \sin\varepsilon - \Sigma' D(i-l) \cos(i,i')$$

$$\nu - \delta\tfrac{h_2}{h} + \tfrac{\Delta n}{n} = \left(C_0 + K + \tfrac{\Delta n}{n}\right) - \tfrac{1}{2}\lambda_1 \cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}\lambda_2 \sin\varepsilon + \tfrac{\Sigma'(i-\frac{1}{2}l-i'\mu)\,D(i-l)}{i-i'\mu} \cos(i,i')$$

$$2\nu = 2C_0 - \lambda_1 \cos\varepsilon - \lambda_2 \sin\varepsilon + \tfrac{\Sigma' l D(i-l)}{i-i'\mu} \cos(i,i')$$

und hiemit wird

$$\int\left(\frac{d\overline{W}}{d\eta}\right)\frac{d\delta z}{dt}\,d\varepsilon = -\tfrac{\frac{1}{2}\lambda_1}{i-i'\mu}\Sigma'\{(l+1)D(i-l-1) + elD(i-l) + (l-1)D(i-l+1)\}\cos(i,i')$$
$$-\tfrac{\frac{1}{2}\lambda_2}{i-i'\mu}\Sigma'\{(l+1)D(i-l-1) - (l-1)D(i-l+1)\}\sin(i,i')$$

$$2\nu\left(\nu - \delta\tfrac{h_0}{h} + \tfrac{\Delta n}{n}\right) = 2C_0\,\Sigma D(i-l)\cos(i,i')$$
$$+\left(K + \tfrac{\Delta n}{n}\right)\tfrac{\Sigma' l D(i-l)}{i-i'\mu}\cos(i,i')$$
$$-\tfrac{1}{2}\lambda_1\Sigma'\{D(i-l-1) + D(i-l+1)\}\cos(i,i')$$
$$-\tfrac{1}{2}\lambda_2\Sigma'\{D(i-l-1) - D(i-l+1)\}\sin(i,i')$$

erhalten. Substituirt man diese Entwickelungen in (7). so folgt daraus, dass

$$2C_0 + K + \tfrac{\Delta n}{n} + \tfrac{e}{2}\lambda_1 = 0$$

sein muss. Die Ausdrücke (11) und (12) geben zu dem Ende

$$2C_0 = -\tfrac{1}{4}k - \tfrac{e}{3}k_1 - G(1.c)$$
$$K = \tfrac{1}{4}k + \tfrac{e}{3}k_1$$
$$\tfrac{\Delta n}{n} = k + G(1.c) - \tfrac{e}{2}\lambda_1$$

woraus in der That

$$2C_0 + K + \tfrac{\Delta n}{n} + \tfrac{e}{2}\lambda_1 = 0 \qquad (14)$$

folgt. Die Bedingungsgleichung (7) wird also auch für diese Glieder identisch Null.

30.

Combiniren wir jetzt die von den willkührlichen Constanten abhängigen Glieder mit den unregelmässigen und von diesen Constanten unabhängigen Gliedern, so wird für $X\nu$

$$\nu = C_0 - \tfrac{1}{2}\lambda_1\cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}\lambda_2\sin\varepsilon$$
$$X = -B(1.c)\sin(-\eta+\varepsilon)$$
$$+A(0.s) + B(1.s)\cos(-\eta+\varepsilon)$$
$$-A(1.c)\sin\varepsilon - B(2.c)\sin(-\eta+2\varepsilon) + C(0.c)\sin\eta$$
$$+A(1.s)\cos\varepsilon + B(2.s)\cos(-\eta+2\varepsilon) + C(0.s)\cos\eta$$

Digitized by Google

woraus

$$
\begin{aligned}
N = & \left\{ \begin{array}{l} C_0 B(1.c) - \tfrac{1}{2}\lambda_1 B(2.c) - \tfrac{1}{2}\lambda_1 C(0.c) \\ \qquad - \tfrac{1}{2}\lambda_2 B(2.s) + \tfrac{1}{2}\lambda_2 C(0.s) \end{array} \right\} \cos(-\eta+\varepsilon) \\
+ & \left\{ \begin{array}{l} C_0 B(1.s) - \tfrac{1}{2}\lambda_1 B(2.s) - \tfrac{1}{2}\lambda_1 C(0.s) \\ \qquad + \tfrac{1}{2}\lambda_2 B(2.c) + \tfrac{1}{2}\lambda_2 C(0.c) \end{array} \right\} \sin(-\eta+\varepsilon) \\
+ & \left\{ C_0 A(1.c) + \tfrac{1}{2}\lambda_2 A(0.s) \right\} \cos\varepsilon \\
+ & \left\{ \tfrac{1}{2} C_0 B(2.c) - \tfrac{1}{2}\lambda_1 B(1.c) + \tfrac{1}{2}\lambda_2 B(1.s) \right\} \cos(-\eta+2\varepsilon) \\
+ & \left\{ C_0 A(1.s) - \tfrac{1}{2}\lambda_1 A(0.s) \right\} \sin\varepsilon \\
+ & \left\{ \tfrac{1}{2} C_0 B(2.s) - \tfrac{1}{2}\lambda_1 B(1.s) - \tfrac{1}{2}\lambda_2 B(1.c) \right\} \sin(-\eta+2\varepsilon) \\
- & \left\{ \tfrac{1}{2}\lambda_1 A(1.c) - \tfrac{1}{2}\lambda_2 A(1.s) \right\} \cos 2\varepsilon \\
- & \left\{ \tfrac{1}{12}\lambda_1 B(2.c) - \tfrac{1}{12}\lambda_2 B(2.s) \right\} \cos(-\eta+3\varepsilon) \\
- & \left\{ \tfrac{1}{2}\lambda_1 C(0.c) - \tfrac{1}{2}\lambda_2 C(0.s) \right\} \cos(\eta+\varepsilon) \\
- & \left\{ \tfrac{1}{8}\lambda_1 A(1.s) + \tfrac{1}{8}\lambda_2 A(1.c) \right\} \sin 2\varepsilon \\
- & \left\{ \tfrac{1}{12}\lambda_1 B(2.s) + \tfrac{1}{12}\lambda_2 B(2.c) \right\} \sin(-\eta+3\varepsilon) \\
- & \left\{ \tfrac{1}{2}\lambda_1 C(0.s) + \tfrac{1}{2}\lambda_2 C(0.c) \right\} \sin(\eta+\varepsilon) \\
+ & \left\{ C_0 A(0.s) - \tfrac{1}{2}\lambda_1 A(1.s) + \tfrac{1}{2}\lambda_2 A(1.c) \right\} \varepsilon \\
+ & \left\{ C_0 C(0.s) - \tfrac{1}{2}\lambda_1 B(1.s) + \tfrac{1}{2}\lambda_2 B(1.c) \right\} \varepsilon\cos\eta \\
- & \left\{ C_0 C(0.c) + \tfrac{1}{2}\lambda_1 B(1.c) + \tfrac{1}{2}\lambda_2 B(1.s) \right\} \varepsilon\sin\eta
\end{aligned}
$$

und

$$
\begin{aligned}
N - \int\left(\frac{dN}{d\eta}\right) d\varepsilon = & \left\{ -2C_0 \Pi(1.c) + \tfrac{e}{2}\lambda_2 H(0.s) \right\} \cos\varepsilon \\
& + \left\{ \tfrac{1}{2}\lambda_1 \Pi(1.c) - \tfrac{1}{2}\lambda_2 \Pi(1.s) \right\} \cos 2\varepsilon \\
& + \left\{ -2C_0 \Pi(1.s) - \tfrac{e}{2}\lambda_1 H(0.s) \right\} \sin\varepsilon \\
& + \left\{ \tfrac{1}{2}\lambda_1 \Pi(1.s) + \tfrac{1}{2}\lambda_2 \Pi(1.c) \right\} \sin 2\varepsilon \\
& + \left\{ e C_0 H(0.s) + \tfrac{1}{2}\lambda_1 \Pi(1.s) - \tfrac{1}{2}\lambda_2 \Pi(1.c) \right\} \varepsilon
\end{aligned}
$$

hervorgeht. Für die übrigen Producte ist jetzt

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{dW}{d\eta}\right) = & -\lambda_1 \sin\varepsilon + \lambda_2 \cos\varepsilon \\
& + eH(0.s) + \{\Pi(1.c) - H(0.c)\}\sin\varepsilon - \{\Pi(1.s) - H(0.s)\}\cos\varepsilon \\
& \qquad - H(0.s)\varepsilon\sin\varepsilon \qquad - H(0.c)\varepsilon\cos\varepsilon
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\frac{d\delta z}{dt} = & \tfrac{e}{2}\lambda_1 + \lambda_1\cos\varepsilon + \lambda_2\sin\varepsilon \\
& + \tfrac{e}{2}H(0.s)\varepsilon + H(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon - H(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\nu - \delta\tfrac{h_0}{h} + \tfrac{d\eta}{n} = & \left(C_0 + K + \tfrac{d\eta}{n}\right) - \tfrac{1}{2}\lambda_1\cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}\lambda_2\sin\varepsilon \\
& - \tfrac{1}{2}\Pi(1.c)\cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}\Pi(1.s)\sin\varepsilon \\
& - \tfrac{1}{2}H(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon + \tfrac{1}{2}H(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon \\
2\nu = & \; 2C_0 - \lambda_1\cos\varepsilon - \lambda_2\sin\varepsilon \\
& + \Pi(1.c)\cos\varepsilon + \Pi(1.s)\sin\varepsilon \\
& + eH(0.s)\varepsilon + H(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon - H(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon
\end{aligned}
$$

Digitized by Google

und mit diesen Werthen erhalten wir

$$\begin{aligned}
\int\left(\tfrac{dW}{d\eta}\right)\tfrac{d\delta_2}{dt}\,d\varepsilon = &-\tfrac{e}{2}\{\lambda_1 H(1.c)+\lambda_2 H(0.s)\}\cos\varepsilon\\
&-\tfrac{1}{4}\{\lambda_1 H(1.c)-\lambda_2 H(1.s)\}\cos 2\varepsilon\\
&-\tfrac{e}{2}\lambda_1\{H(1.s)-\ H(0.s)\}\sin\varepsilon\\
&-\tfrac{1}{4}\{\lambda_1 H(1.s)+\lambda_2 H(1.c)\}\sin 2\varepsilon\\
&-\tfrac{1}{4}\{\lambda_1[H(1.s)-(1+e^2)H(0.s)]-\lambda_2[H(1.c)-H(0.c)]\}\varepsilon\\
&+e\lambda_1\ \ H(0.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon\\
&+\tfrac{1}{4}\{\lambda_1 H(0.s)+\lambda_2 H(0.c)\}\varepsilon\cos 2\varepsilon\\
&-\tfrac{e}{2}\{\lambda_1 H(0.c)-\lambda_2 H(0.s)\}\varepsilon\sin\varepsilon\\
&-\tfrac{1}{4}\{\lambda_1 H(0.c)-\lambda_2 H(0.s)\}\varepsilon\sin 2\varepsilon
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
2\nu\left(\nu-\delta\,\tfrac{h_0}{h}+\tfrac{\Delta n}{n}\right) = &\left(K+\tfrac{\Delta n}{n}\right)H(1.c)\cos\varepsilon+\left(K+\tfrac{\Delta n}{n}\right)H(1.s)\sin\varepsilon\\
&+\left\{-e\left(C_0+K+\tfrac{\Delta n}{n}\right)H(0.s)+\tfrac{1}{2}\lambda_1 H(0.s)-\tfrac{1}{4}\lambda_2 H(0.s)\right\}\varepsilon\\
&-\left(2C_0+K+\tfrac{\Delta n}{n}-\tfrac{e}{2}\lambda_1\right)H(0.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon\\
&+\tfrac{1}{4}\lambda_1 H(0.s)+\lambda_2 H(0.c)\}\,\varepsilon\cos 2\varepsilon\\
&+\left\{\left(2C_0+K+\tfrac{\Delta n}{n}\right)H(0.c)+\tfrac{e}{2}\lambda_2 H(0.s)\right\}\varepsilon\sin\varepsilon\\
&-\tfrac{1}{4}\{\lambda_1 H(0.c)-\lambda_2 H(0.s)\}\,\varepsilon\sin 2\varepsilon
\end{aligned}$$

Substituirt man diese in (7), so findet man

$$\begin{aligned}
0 = &-\left(2C_0+K+\tfrac{\Delta n}{n}+\tfrac{e}{2}\lambda_1\right)H(1.c)\cos\varepsilon\\
&-\left(2C_0+K+\tfrac{\Delta n}{n}+\tfrac{e}{2}\lambda_1\right)H(1.s)\sin\varepsilon\\
&+e\left(2C_0+K+\tfrac{\Delta n}{n}+\tfrac{e}{2}\lambda_1\right)H(0.s)\,\varepsilon\\
&+\left(2C_0+K+\tfrac{\Delta n}{n}+\tfrac{e}{2}\lambda_1\right)H(0.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon\\
&-\left(2C_0+K+\tfrac{\Delta n}{n}+\tfrac{e}{2}\lambda_1\right)H(0.c)\,\varepsilon\sin\varepsilon
\end{aligned}$$

wo wieder jeder Coefficient vermöge der Gleichung (14) identisch Null ist.

## 34.

Wir haben, um alle Gattungen von Gliedern zu erschöpfen, nun nur noch die von den willkührlichen Constanten abhängigen Glieder mit den ähnlichen zu verbinden, und für diese Combinationen ist sogleich einzusehen, dass

$$\overline{N}-\int\left(\tfrac{dN}{d\eta}\right)d\varepsilon = 0$$

Digitized by Google

wird, da $X$ die willkührlichen Constanten nicht enthält. Für die übrigen Producte wird jetzt

$$\left(\frac{dW}{d\eta}\right) = -\lambda_1 \sin\varepsilon + \lambda_2 \cos\varepsilon$$

$$\frac{d\delta z}{dt} = \frac{e}{2}\lambda_1 + \lambda_1 \cos\varepsilon + \lambda_2 \sin\varepsilon$$

$$\nu - \vartheta\frac{h_0}{h} + \frac{\Delta n}{n} = \left(C_0 + K + \frac{\Delta n}{n}\right) - \tfrac{1}{2}\lambda_1 \cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}\lambda_2 \sin\varepsilon$$

$$2\nu = 2C_0 - \lambda_1 \cos\varepsilon - \lambda_2 \sin\varepsilon$$

wodurch

$$\int\left(\frac{dW}{d\eta}\right)\frac{d\delta z}{dt}\,d\varepsilon = \frac{e}{2}\lambda_1^2 \cos\varepsilon + \frac{e}{2}\lambda_1\lambda_2 \sin\varepsilon + \tfrac{1}{4}\{\lambda_1^2 - \lambda_2^2\}\cos 2\varepsilon + \tfrac{1}{2}\lambda_1\lambda_2 \sin 2\varepsilon$$

$$2\nu\left(\nu - \vartheta\frac{h_0}{h} + \frac{\Delta n}{n}\right) = -\left(2C_0 + K + \frac{\Delta n}{n}\right)\lambda_1 \cos\varepsilon - \left(2C_0 + K + \frac{\Delta n}{n}\right)\lambda_2 \sin\varepsilon$$
$$+ \tfrac{1}{4}\{\lambda_1^2 - \lambda_2^2\}\cos 2\varepsilon + \tfrac{1}{2}\lambda_1\lambda_2 \sin 2\varepsilon$$

wird. Die Substitution dieser Ausdrücke in (7) führt auf die Gleichung

$$0 = \left(2C_0 + K + \frac{\Delta n}{n} + \frac{e}{2}\lambda_1\right)\lambda_1 \cos\varepsilon + \left(2C_0 + K + \frac{\Delta n}{n} + \frac{e}{2}\lambda_1\right)\lambda_2 \sin\varepsilon$$

die sich wieder vermöge (14) als identisch Null erweist. Also die Gleichung (7) ist für je zwei Gattungen der darin vorkommenden Glieder identisch Null.

## 32.

Ich werde jetzt noch zwei Sätze beweisen, die bei der Berechnung der von den Quadraten der störenden Kräfte abhängigen Glieder in Betracht kommen.

»In der Entwickelung der Function

$$\left(\frac{d^2W}{d\eta^2}\right)\frac{a n \delta z}{r} - \left(\frac{dW}{d\eta}\right)\frac{a n \delta z}{r} \cdot \frac{a a \sin\varepsilon}{r}$$

nach den Cosinussen und Sinussen der Vielfachen von $\varepsilon$ ist das $\varepsilon^2$ oder $n^2t^2$ proportionale Glied Null.«

Das genannte Glied kann nur aus der Multiplication der in den Factoren bereits mit $\varepsilon$ oder $nt$ multiplicirten Glieder mit einander entstehen, und aus dem Art. 23 folgt, dass diese die folgenden sind,

$$\left(\frac{dW}{d\eta}\right) = \quad - \quad H(0.s)\varepsilon \sin\varepsilon \quad - \quad H(0.c)\varepsilon \cos\varepsilon$$

$$\left(\frac{d^2W}{d\eta^2}\right) = \quad - \quad H(0.s)\varepsilon \cos\varepsilon \quad + \quad H(0.c)\varepsilon \sin\varepsilon$$

$$n\delta z \quad = \left(1 - \frac{e^2}{2}\right)H(0.s)\varepsilon \sin\varepsilon \quad + \quad H(0.c)\varepsilon \cos\varepsilon$$
$$- \frac{e}{4}\ H(0.s)\varepsilon \sin 2\varepsilon \ - \frac{e}{4}H(0.c)\varepsilon \cos 2\varepsilon$$



Digitized by Google

und hieraus folgt, wenn wir in den Producten die Glieder weglassen, die auf keinen Fall in der oben genannten Function ein $\varepsilon^2$ proportionales Glied hervorbringen können,

$$\left(\frac{d^2W}{d\eta^2}\right)n\delta z = -H(0.s)\,(H0.c)\left\{\frac{e^2}{4}+\left(1-\frac{e^2}{4}\right)\cos 2\varepsilon-\frac{e}{4}\cos 3\varepsilon\right\}\varepsilon^2$$
$$\left(\frac{dW}{d\eta}\right)n\delta z = -H(0.s)\,H(0.c)\left\{\left(1-\frac{e^2}{4}\right)\sin 2\varepsilon-\frac{e}{4}\sin 3\varepsilon\right\}\varepsilon^2$$

Aus der mehrmals angewandten Reihe

$$\frac{a}{r}\cos\varphi = 1+2\beta\cos\varepsilon+2\beta^2\cos 2\varepsilon+2\beta^3\cos 3\varepsilon+\ldots$$

wo $\beta = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$ ist, folgt

$$\frac{a^2e\sin\varepsilon}{r^2}\cos\varphi = 2\beta\sin\varepsilon+4\beta^2\sin 2\varepsilon+6\beta^3\sin 3\varepsilon+\ldots$$

und hiemit wird

$$\left(\frac{d^2W}{d\eta^2}\right)\frac{an\delta z}{r}-\left(\frac{dW}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r}\cdot\frac{ae\sin\varepsilon}{r} =$$
$$-\frac{H(0.c)\,H(0.c)}{\cos\varphi}\left\{\frac{e^2}{4}-\beta^2\left(1-\frac{e^2}{4}\right)+\beta^3\frac{e}{2}\right\}\varepsilon^2$$

wenn wir blos auf das $\varepsilon^2$ proportionale Glied Rücksicht nehmen. Dem obigen Satze zufolge muss also

$$\frac{e^2}{4}-\beta^2\left(1-\frac{e^2}{4}\right)-\beta^3\frac{e}{2}=0$$

sein; es ist aber

$$e=\frac{2\beta}{1+\beta^2}$$

substituirt man diesen Werth, so wird

$$\frac{e^2}{4}-\beta^2\left(1-\frac{e^2}{4}\right)+\beta^3\frac{e}{2}=\frac{\beta^2}{(1+\beta^2)^2}-\beta^2\left(1-\frac{\beta^2}{(1+\beta^2)^2}\right)+\frac{\beta^4}{1+\beta^2}=$$
$$\frac{1}{(1+\beta^2)^2}\left\{\beta^2-\beta^2(1+\beta^2+\beta^4)+\beta^4(1+\beta^2)\right\}=0$$

W. Z. B. W.

## 33.

»In der Entwickelung der im §. 1 (I) mit $I'$ bezeichneten Function sind keine mit $\varepsilon^2$ oder $n^2t^2$ multiplicirte Glieder vorhanden.«

Aus der Gleichung (23) (I) folgt leicht, dass

$$dI' = \frac{1}{2\cos\varphi\cos i}\cdot\frac{r}{a}\cdot\frac{u}{\cos i}\cdot a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)d\varepsilon$$

ist, und aus diesem Ausdruck giebt sich sogleich zu erkennen, dass, wenn in $I'$ Glieder vorhanden sind, die mit $\varepsilon^2$ oder $t^2$ multiplicirt sind, diese sich nothwendig auf ein $\varepsilon^2$ oder $t^2$ proportionales Glied beschränken

Digitized by Google

müssen. Der Beweis des obigen Satzes reducirt sich also auf den Beweis, dass in $d\Gamma$ kein $\varepsilon$ oder $t$ proportionales Glied vorhanden ist, und ein solches kann nur aus den im Ausdruck von $\frac{ru}{a\cos i}$ befindlichen mit $\varepsilon$ multiplicirten Gliedern entstehen, da im Ausdruck von $a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ keine solche Glieder vorhanden sind.

Aus dem §. 5 (II) erhalten wir mit bloser Rücksicht auf diese Glieder

$$\frac{u}{\cos i} = -eV(0.s)\varepsilon - V(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon - V(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon$$

multiplicirен wir diese mit dem Ausdruck $1-e\cos\varepsilon$ von $\frac{r}{a}$, so ergiebt sich

$$\frac{ru}{a\cos i} = -\tfrac{3e}{2}V(0.s)\varepsilon - V(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon + (1+e^2)V(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon + \tfrac{e}{2}V(0.c)\varepsilon\sin 2\varepsilon - \tfrac{e}{2}V(0.s)\varepsilon\cos 2\varepsilon$$

Setzen wir nun, ebenfalls in den im §. 5 (II) angewandten Bezeichnungen,

$$a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = \tfrac{1}{2}d(0.c) + d(1.s)\sin\varepsilon + d(1.c)\cos\varepsilon + d(2.s)\sin 2\varepsilon + d(2.c)\cos 2\varepsilon$$

so haben wir in dieser Function alle Glieder aufgenommen, die durch Multiplication mit dem vorhergehenden Ausdruck in $d\Gamma$ Glieder hervorbringen können, die $\varepsilon$ proportional sind. Nach der Ausführung der Multiplication werden diese Glieder

$$2\frac{d\Gamma}{d\varepsilon}\cos i\cos\varphi = -V(0.s)\left\{\tfrac{3e}{4}d(0.c) - \tfrac{4+e^2}{2}d(1.c) + \tfrac{e}{4}d(2.c)\right\}\varepsilon + V(0.c)\left\{-\tfrac{1}{2}d(1.s) + \tfrac{e}{4}d(2.s)\right\}\varepsilon$$

Aber die Gleichungen (28) (II) geben

$$V(0.c) = \tfrac{3e}{4}d(0.c) - \tfrac{4+e^2}{2}d(1.c) + \tfrac{e}{4}d(2.c)$$
$$V(0.s) = -\tfrac{1}{2}d(1.s) + \tfrac{e}{4}d(2.s)$$

durch deren Substitution der vorstehende Ausdruck sogleich

$$\frac{d\Gamma}{d\varepsilon} = 0$$

wird. W. Z. B. W.

Dieser Satz ergänzt die in §. 7 (II) in Bezug auf die Säcularänderung der mittleren Länge bewiesenen Sätze, denn wenn in $\Gamma$ ein dem Quadrat der Zeit proportionales Glied vorkäme, so würde dasselbe auf die Säcularänderung der mittleren Länge eine Mitwirkung äussern, da $\Gamma$ in der Reduction der Länge in der Bahn auf die Fundamentalebene, vermöge der Gleichungen (21) (I), enthalten ist.



Digitized by Google

## §. 4. Entwickelung der Hülfsgrössen für die Berechnung der vom Quadrat der störenden Masse abhängigen Glieder, nebst Anwendung auf die Egeria.

### 34.

Für die Längenstörungen ist zuerst der im Art. 43 (I) abgeleitete Ausdruck für $\frac{d\delta W_0}{dt}$ zu entwickeln, in welchem jedoch auf zwei von dem Unterschiede zwischen dem der Rechnung zu Grunde gelegten osculirenden Werthe der mittleren Bewegung und dem wahren Werthe derselben herrührenden Glieder noch keine Rücksicht genommen worden ist. Das eine dieser Glieder, welches in der Wirkung besteht, die der genannte Unterschied der mittleren Bewegungen auf die Integrationsdivisoren ausübt, ist schon im Art. 56 (II) vollständig entwickelt, und braucht daher in $\frac{d\delta W_0}{dt}$ nicht besonders aufgenommen zu werden, das andere aus derselben Ursache entstehende Glied verursacht eine kleine Veränderung in der im Art. 74 (I) eingeführten und mit $\lambda$ bezeichneten Grösse, die vom Verhältniss $\mu$ der mittleren Bewegungen abhängt. Dieses Glied muss der Vollständigkeit wegen mit aufgenommen werden und ist leicht zu berücksichtigen, denn wenn wir $T$ in der Bedeutung des §. 5 (I) wieder aufnehmen, so ist es augenscheinlich $= \left(\frac{dT}{d\lambda}\right)\delta\lambda$. Betrachten wir daher nur fürerst das Quadrat der störenden Kraft, so wird der Eingangs angezogene Ausdruck

$$(15) \qquad \frac{d\delta W_0}{dt} = \left(\frac{dT}{d\lambda}\right)\delta\lambda + A\frac{and z}{r} + B\nu + C\delta\frac{h}{h_0} + D\frac{u}{\cos i} + E\frac{u_1}{\cos i}$$

welcher auf die einfachste Weise dadurch numerisch entwickelt wird, dass man die Entwickelungen von $\left(\frac{dT}{d\lambda}\right)$, $A$, $B$, etc. mit den in der Abhandlung (II) mit Rücksicht auf die erste Potenz der Massen erhaltenen Ausdrücke für $\delta\lambda$, $\frac{and z}{r}$, $\nu$, etc. numerisch auf die von mir zuerst in der »Untersuchung über die gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns« angegebene und ausgeführte Art multiplicirt.

### 35.

Nehmen wir zuerst das Product $\left(\frac{dT}{d\lambda}\right)\delta\lambda$ vor, welches in der Behandlung das einfachste ist, weil $\delta\lambda$ eine Constante ist. Da

$$\lambda = \tfrac{1}{4}e\mu$$

ist, so wird

$$\delta\lambda = -\tfrac{1}{4}e\mu\frac{\Delta n}{n}$$

Digitized by Google

wo $\Delta n = (n) - n_0$ ist, oder den Unterschied zwischen der wahren und der osculirenden mittleren Bewegung bedeutet. Für die Egeria wurde im Art. 64 (II) gefunden

$$\Delta n = -0''09148$$

und es wird daher

$$\delta\lambda = +0{,}00000158$$

## 36.

Um den Ausdruck des Differentialquotienten von $T$ nach $\lambda$ zu erhalten, sei überhaupt $F$ eine Function von folgender Form:

$$F = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma'\{(i,i',c)) - \sqrt{-1}.((i,i',s))\}y^i z'^{-i'}$$

die in folgende verwandelt worden ist:

$$F = \tfrac{1}{2}\Sigma\Sigma'\{[i,i',c] - \sqrt{-1}.[i,i',s]\}\pi^{-i'}y^{i-i'\mu}$$

wo die Bezeichnungen dieselben sind, wie in Art. 74 (I). Substituirt man in den ersten dieser Ausdrücke die Gleichung (141) (I), nemlich

$$z'^{-i'} = \pi^{-i'}y^{-i'\mu}h^{i'\lambda\left(y-\frac{1}{y}\right)}$$

so wird

$$\Sigma\Sigma'[i,i',c]\,\pi^{-i'}y^{i-i'\mu} = \Sigma\Sigma'((i,i'c))\,\pi^{-i'}y^{i-i'\mu}h^{i'\lambda\left(y-\frac{1}{y}\right)}$$

und eine ähnliche Gleichung bekommt man für $\Sigma\Sigma'[i,i',s]$. Da aber in diesen Gleichungen zu beiden Seiten $i'$ unverändert bleibt, so darf man das eine Summenzeichen weglassen, und die Gleichung wird daher

$$\Sigma'[i,i',c]y^i = h^{i'\lambda\left(y-\frac{1}{y}\right)}\Sigma'((i,i',c))\,y^i$$

wenn man diese nach $\lambda$ differentiirt, so erhält man

$$\begin{aligned}\Sigma'\left(\tfrac{d[i,i',c]}{d\lambda}\right)y^i &= i'\left(y-\tfrac{1}{y}\right)h^{i'\lambda\left(y-\frac{1}{y}\right)}\Sigma'((i,i',c))\,y^i\\ &= i'\left(y-\tfrac{1}{y}\right)\Sigma'[i,i',c]y^i\\ &= i'\Sigma'\{[i-1,i',c]-[i+1,i'c]\}y^i\end{aligned}$$

Geht man hievon zum Reellen über, so bekommt man

$$\left.\begin{aligned}\left(\tfrac{dF}{d\lambda}\right) = \Sigma\Sigma' i'\{[i-1,i',c]-[i+1,i',s]\}\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon - U\}\\ +\Sigma\Sigma' i'\{[i-1,i',s]-[i+1,i',s]\}\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon - U\}\end{aligned}\right\} \quad (16)$$

wo $U$ für $i'(c'-c\mu)$ geschrieben ist. Also um den Differentialquotienten nach $\lambda$ einer Function von der Form

$$F = \Sigma\Sigma'[i,i',c]\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon - U\} + \Sigma\Sigma'[i,i',s]\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon - U\}$$

zu erhalten, braucht man nur in Bezug auf jedes Glied den Coefficienten des nachfolgenden Gliedes von dem des vorhergehenden zu subtrahiren und den Unterschied mit $i'$ zu multipliciren. In den Functionen, die

Digitized by Google

wie $T$ aus Gliedern bestehen, die unter den Sinus- und Cosinuszeichen die Bögen

$$(i-i'\mu)\varepsilon - U$$
$$-\eta + (i-i'\mu)\varepsilon - U$$
$$\eta + (i-i'\mu)\varepsilon - U$$

enthalten, muss diese Regel auf jede dieser drei Gattungen von Gliedern besonders angewandt werden.

37.

Für unser Beispiel und für die Jupiterstörungen, die einzigen die hier in Betracht kommen, habe ich aus der Tafel des Art. 57 (II) für $T$ die Coefficienten des Differentialquotienten nach $\lambda$ berechnet, die auf jeden Fall ausreichen. Wenn man von der imaginären Form von $T$ zum Reellen übergeht, so findet man, dass die in der ersten Columne der angeführten Tafel gegebenen Zahlen die Coefficienten der Sinusse mit umgekehrten, und die in der zweiten Columne gegebenen die der Cosinusse mit wahren Zeichen sind. Deshalb habe ich den betr. Columnen der folgenden Tafel die Ueberschriften — sin und cos gegeben.

$$\left(\frac{dT}{d\lambda}\right)$$

| $i,-i'$ | $-\sin$ | cos | $i,-i'$ | $-\sin$ | cos | $i,-i'$ | $-\sin$ | cos |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,−2 | +27".96 | −22.38 | 3,−3 | +92".61 | +10".98 | 4,−5 | −91".85 | −30".80 |
| | −11.44 | +4.38 | | −31.32 | −6.27 | | +26.20 | +11.45 |
| | −31.28 | +29.42 | | −95.61 | −10.95 | | +94.75 | +30.55 |
| 1,−2 | −177.82 | +125.20 | 4,−3 | −159.06 | −125.25 | 5,−5 | −76.05 | +46.00 |
| | +49.58 | −32.82 | | +49.77 | +39.06 | | +26.35 | −14.65 |
| | +186.76 | −133.52 | | +163.11 | +127.80 | | +77.10 | −46.80 |
| 2,−2 | −36.64 | +23.14 | 2,−4 | +31.28 | +89.52 | 6,−5 | +95.95 | +7.60 |
| | +15.32 | −7.10 | | −6.92 | −28.24 | | −30.75 | −2.45 |
| | +37.62 | −26.62 | | −33.00 | −95.12 | | −97.65 | −7.10 |
| 3,−2 | +187.58 | −129.14 | 3,−4 | +67.72 | −126.92 | 2,−6 | −0.06 | +5.82 |
| | −56.70 | +39.26 | | −21.96 | +35.28 | | +2.22 | −1.44 |
| | −193.66 | +133.16 | | −68.84 | +134.88 | | −1.44 | −6.60 |
| 0,−3 | +7.62 | −3.99 | 4,−4 | −22.32 | −98.52 | 3,−6 | +25.44 | −7.62 |
| | −8.88 | −1.29 | | +5.84 | +33.84 | | −9.30 | +0.06 |
| | −4.05 | +6.69 | | +23.00 | +100.52 | | −26.46 | +8.94 |
| 1,−3 | −86.67 | +0.87 | 5,−4 | −53.44 | +137.72 | 4,−6 | −52.32 | −40.86 |
| | +26.04 | +3.00 | | +16.96 | −43.68 | | +15.12 | +13.80 |
| | +94.11 | −0.54 | | +53.88 | −140.60 | | +54.54 | +42.54 |
| 2,−3 | +147.12 | +122.97 | 3,−5 | +68.20 | −50.30 | 5,−6 | −12.30 | +61.68 |
| | −39.87 | −36.66 | | −22.20 | +13.80 | | +5.70 | −18.12 |
| | −154.35 | −127.08 | | −71.50 | +52.65 | | +11.76 | −63.18 |
| | | | | | | 6,−6 | +51.72 | +45.36 |
| | | | | | | | −16.86 | −15.72 |
| | | | | | | | −52.56 | −45.90 |

Digitized by Google

Die Anordnung dieser Tafel ist übrigens dieselbe wie die der bez. Tafeln der Abhandlung (II). Die drei Zeilen jedes Arguments enthalten der Reihenfolge nach die Coefficienten von

$$(i - i'\mu)\varepsilon - U$$
$$-\eta + (i + 1 - i'\mu)\varepsilon - U$$
$$\eta + (i - 1 - i'\mu)\varepsilon - U$$

so dass diese schliesslich sich zu einem und demselben Argument vereinigen. Die von $i' = 1$ abhängigen Glieder habe ich weggelassen, weil sie so klein sind, dass sie keine merkliche Wirkung äussern können.

## 38.

Für das zweite Glied des Ausdrucks (15) werde ich zuerst das Product von $n\delta z$ mit $\frac{a}{r}$ berechnen. Die Substitution des in unserm Beispiel (§. 7 (I)) angewandten Werthes von $\varphi$ in die Reihe

$$\frac{a}{r} - 1 = \frac{2\beta^2}{1-\beta^2} + \frac{2\beta}{\cos\varphi}\cos\varepsilon + \frac{2\beta^2}{\cos\varphi}\cos 2\varepsilon + \frac{2\beta^3}{\cos\varphi}\cos 3\varepsilon + \ldots$$

wo $\beta = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$ ist, giebt

$$\frac{a}{r} - 1 = (7.5586) + 2(8.62997)\cos\varepsilon + 2(7.2584)\cos 2\varepsilon + 2(5.8868)\cos 3\varepsilon + 2(4.516)\cos 4\varepsilon + \text{etc.}$$

wo die in Klammern eingeschlossenen Zahlen die Logarithmen der Coefficienten sind. Es ist vonVortheil, das Product $\left(\frac{a}{r} - 1\right) n\delta z$ zu berechnen und dazu $n\delta z$ zu addiren um $\frac{an\delta z}{r}$ zu erhalten, und darum habe ich jenen Ausdruck hier angesetzt. Bezeichnet man diesen mit

$$\frac{a}{r} - 1 = \alpha_0 + 2\alpha_1\cos\varepsilon + 2\alpha_2\cos 2\varepsilon + \ldots$$

und setzt

$$n\delta z = \Sigma A_s^{(i)} \sin\{(i - i'\mu)\varepsilon - U\} + \Sigma A_c^{(i)} \cos\{(i - i'\mu)\varepsilon - U\}$$

so wird

$$\left(\frac{a}{r} - 1\right) n\delta z = \Sigma \left\{ \begin{matrix} \alpha_0 A_s^{(i)} + \alpha_1 A_s^{(i-1)} + \alpha_2 A^{(i-2)} + \ldots \\ + \alpha_1 A_s^{(i+1)} + \alpha_2 A^{(i+2)} + \ldots \end{matrix} \right\} \sin\{(i - i'\mu)\varepsilon - U\}$$

$$+ \Sigma \left\{ \begin{matrix} \alpha_0 A_c^{(i)} + \alpha_1 A_c^{(i-1)} + \alpha_2 A_c^{(i-2)} + \ldots \\ + \alpha_1 A_c^{(i+1)} + \alpha_2 A_c^{(i+2)} + \ldots \end{matrix} \right\} \cos\{(i - i'\mu)\varepsilon - U\}$$

wo keine Ausnahme statt findet, weil in $n\delta z$ kein constantes Glied enthalten ist. Die einfachste Art dieses Product, so wie die übrigen, die

Digitized by Google

weiter unten erklärt werden sollen, zu berechnen, besteht darin, dass man die Logarithmen der Coefficienten des Factors $n\delta z$ auf den oberen Rand eines in Columnen von passender Breite eingetheilten Blattes Papiers, und die des Factors $\frac{a}{r}-1$ auf den unteren Rand eines anderen Stückes Papiers schreibt. Legt man hierauf um die Logarithmen zu addiren dieses Papier an jenes, so erkennt man sogleich aus den ersten Stellen der Summe der Logarithmen, ob das betreffende partielle Product die numerische Grenze, die man festgesetzt hat, überschreitet oder nicht, und also ob es berücksichtigt werden muss oder nicht. Die Zahlen der Logarithmen der partiellen Producte schreibt man darau auf ein anderes Blatt Papiers der obigen Formel gemäss in die betreffenden Columnen, worauf man die Glieder, aus welchen jeder Coefficient des Products zusammengesetzt ist, addirt.

Im §. 6 (II) ist nicht nur der hier anzuwendende numerische Werth von $n\delta z$, sondern es sind auch die von $\nu$, $\frac{u}{\cos i}$, etc. gegeben, und es ist dort, wie im Endresultat und zur Bestimmung der willkührlichen Constanten erforderlich ist, ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen $\varepsilon$ durch $nt$ eliminirt. Man kann bei der Berechnung der von den Quadraten und Producten der störenden Kräfte abhängigen Glieder diese Form beibehalten, denn es ist nicht schwierig die Integrale derselben anzugeben, allein mit Beibehaltung von $\varepsilon$ statt $nt$ in den genannten Gliedern werden diese Integrale weit einfacher, und da man nach den Integrationen wieder $\varepsilon$ durch $nt$ eliminiren kann und diese Elimination sich mit der Ausnahme von wenigen Gliedern auf die blose Substitution von $nt$ für $\varepsilon$ reducirt, so ist es vortheilhafter, die Form, die $\varepsilon$ ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen enthält, anzuwenden. Nur das Glied im Ausdruck von $nz$, welches die mittlere Bewegung ist, muss in der Form $(n)t$ belassen werden.

Im Art. 61 (II) wurde für die Egeria gefunden

$$\begin{aligned} nz = \quad & 19^{\circ}33'27''{,}9 && + 858''{,}2946\,t \\ & + 808''{,}60 \sin\varepsilon && - 664''{,}63 \cos\varepsilon \\ & - 0''{,}79882\,nt \sin\varepsilon && - 2''{,}58626\,nt \cos\varepsilon \\ & + \text{etc.} && + \text{etc.} \end{aligned}$$

Wenn wir hievon die beiden ersten Glieder ablösen, so bekommen wir den in der Berechnung der Störungen zweiter Ordnung anzuwendenden Ausdruck von $n\delta z$. Es wird also

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
n\delta z = &+ 808.60 \sin\varepsilon && - 664.63 \cos\varepsilon \\
&- 0.79882\, nt \sin\varepsilon && - 2.58626\, nt \cos\varepsilon \\
&- 19.61 \sin 2\varepsilon && + 14.86 \cos 2\varepsilon \\
&+ 0.01701\, nt \sin 2\varepsilon && + 0.05487\, nt \cos 2\varepsilon \\
&+ 0.11 \sin 3\varepsilon && - 0.08 \cos 3\varepsilon \\
&+ \text{etc.} && + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

Führt man hier ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen $\varepsilon$ statt $nt$ durch die Gleichung $nt = \varepsilon - e \sin\varepsilon$ ein, so wird

$$
\begin{aligned}
n\delta z = &- 0.79882\, \varepsilon \sin\varepsilon && - 2.58626\, \varepsilon \cos\varepsilon \\
&+ 0.01701\, \varepsilon \sin 2\varepsilon && + 0.05487\, \varepsilon \cos 2\varepsilon \\
& && + 0.03 \\
&+ 808.60 \sin\varepsilon && - 664.63 \cos\varepsilon \\
&- 19.50 \sin 2\varepsilon && + 14.83 \cos 2\varepsilon \\
&+ 0.11 \sin 3\varepsilon && - 0.08 \cos 3\varepsilon \\
&+ \text{etc.} && + \text{etc.}
\end{aligned}
$$

wo die etc. Zeichen sich auf die im Art. 59 (II) gegebenen Glieder von $n\delta z$ beziehen, die von $i' = 1$, $i' = 2$, etc. abhängen.

Mit bloser Rücksichtnahme auf die Jupiterstörungen ergab sich hieraus

$$\frac{a n \delta z}{r}$$

| $i, -i'$ | sin | cos | $i, -i'$ | sin | cos | $i, -i'$ | sin | cos |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | | $-0.22044\,\varepsilon$ | $-1,-2$ | $-0.12$ | $+0.66$ | 3,−4 | +6.53 | −16.94 |
| 1,0 | $-0.79954\,\varepsilon$ | $-2.59798\,\varepsilon$ | 0,−2 | +3.17 | +6.42 | 4,−4 | +1.68 | +4.03 |
| 2,0 | $-0.01694\,\varepsilon$ | $-0.05545\,\varepsilon$ | 1,−2 | −183.06 | −165.49 | 5,−4 | +0.17 | +0.14 |
| 3,0 | $-0.00072\,\varepsilon$ | $-0.00235\,\varepsilon$ | 2,−2 | −196.23 | −140.01 | 1,−5 | +0.30 | +0.65 |
| 0,0 | | −56.59 | 3,−2 | −4.28 | −2.47 | 2,−5 | +17.55 | +2.70 |
| 1,0 | +809.23 | −667.61 | 4,−2 | +0.11 | −0.03 | 3,−5 | +1.35 | −13.01 |
| 2,0 | +14.86 | −13.52 | −1,−3 | −1.33 | −1.22 | 4,−5 | +2.78 | +1.84 |
| 3,0 | +0.63 | −0.57 | 0,−3 | −40.84 | −34.51 | 5,−5 | −1.19 | +0.10 |
| −2,−1 | +0.15 | +0.04 | 1,−3 | −542.47 | −621.75 | 6,−5 | −0.09 | +0.03 |
| −1,−1 | −3.44 | +5.09 | 2,−3 | +705.19 | −26.45 | 1,−6 | +1.03 | −0.04 |
| 0,−1 | +17.60 | −14.42 | 3,−3 | +32.39 | −14.50 | 2,−6 | +18.89 | +2.19 |
| 1,−1 | +40.23 | −115.51 | 4,−3 | +0.97 | −0.53 | 3,−6 | −2.30 | +13.61 |
| 2,−1 | +2.20 | −2.23 | 0,−4 | −0.25 | −0.13 | 4,−6 | +1.50 | +0.78 |
| 3,−1 | +0.02 | −0.89 | 1,−4 | −1.08 | +0.44 | 5,−6 | −0.80 | +0.60 |
| | | | 2,−4 | +30.47 | −4.18 | 6,−6 | +0.08 | −0.36 |

wo ich sowohl statt des constanten, wie statt des $\varepsilon$ proportionalen Gliedes das Doppelte derselben angesetzt habe, weil dieses für die nachherige Anwendung von Vortheil ist. Man kann die Richtigkeit dieses Products auf einfache Weise dadurch controliren, dass man es mit $1 - e \cos\varepsilon$

Digitized by Google

multiplicirt, wodurch man $n\delta z$ wieder bekommen muss. Weiter wie bis zu den Gliedern, in welchen $i'=6$ ist, zu gehen hielt ich nicht für nöthig, und die weiteren Rechnungen zeigten auch, dass dieses in diesem Beispiel hinreichend ist. Die Saturn- und mehr noch die Marsstörungen sind so klein, dass sie bei den Quadraten der störenden Massen nicht berücksichtigt zu werden brauchen.

In den von $i'=0$ abhängigen Gliedern von $nz$, $\nu$, etc., die im Art. 61 (II) gegeben sind und hier angewandt werden müssen, ist auch auf Saturn und Mars mit Rücksicht genommen worden, und wenn man will, dass in den folgenden Rechnungen die Bedingungsgleichungen so genau wie möglich erfüllt sein sollen, so muss man auch in den Gliedern der Hülfsgrössen, in welchen $i'=0$ ist, wenigstens die Saturnstörungen mit zuziehen. Dieses soll hier im Folgenden geschehen.

## 39.

Zufolge der Gleichung (63) (I) ist

$$A=\left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right)-T\frac{ae\sin\varepsilon}{r}$$

und im Art. 75 (I) ist das Verfahren entwickelt, durch welches man überhaupt von den hier vorkommenden Functionen den partiellen Differentialquotienten nach $\varepsilon$ erhält. Wenn wieder überhaupt $F$ irgend eine dieser Functionen bedeutet, und

$$F=\Sigma[i,i',c]\sin(i,i')+\Sigma[i,i',s]\cos(i,i')$$

ist, wo, gleichwie im Folgenden, zur Abkürzung $(i,i')$ statt $(i-i'\mu)\varepsilon-U$ geschrieben worden ist, so wird

$$\left(\frac{dF}{d\varepsilon}\right)=\Sigma\{i,i',c\}\cos(i,i')-\Sigma\{i,i',s\}\sin(i,i')$$

wo

$$(17)\qquad \begin{cases}\{i,i',c\}=i[i,i',c]-i'\lambda\{[i-1,i',c]+[i+1,i',c]\}\\ \{i,i',s\}=i[i,i',s]-i'\lambda\{[i-1,i',s]+[i+1,i',s]\}\end{cases}$$

und wieder $\lambda=\frac{1}{2}e\mu$ ist. Die Anwendung dieser Ausdrücke ist zu einfach, als dass sie noch besonders erläutert zu werden brauchte; ich führe blos an, dass in der Berechnung von $\left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right)$ aus den Coefficienten der Tafel des Art. 57 (II) nach diesen Ausdrücken, man dieselben, gleichwie bei der Erklärung der Berechnung von $\left(\frac{dT}{d\lambda}\right)$ gesagt wurde, auf jede der drei Gattungen von Gliedern in $T$ besonders anwenden muss.

Digitized by Google

Um die im vor. § erklärte Bedingungsgleichung anwenden zu können, muss man auch $\left(\frac{d\overline{T}}{d\varepsilon}\right)$ berechnen, wo wie immer $\overline{T}$ die Function bezeichnet, die aus $T$ hervorgeht, wenn man darin $\eta$ in $\varepsilon$ verwandelt. Durch die Berechnung dieses Differentialquotienten kann man die von $\left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right)$ vermittelst der schon im vor. § vorkommenden Gleichung

$$\left(\frac{d\overline{T}}{d\varepsilon}\right)=\left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right)+\left(\frac{dT}{d\eta}\right) \tag{18}$$

leicht controliren. Hat man sich der Richtigkeit der Rechnung auf andere Art versichert, so kann man ausschliesslich durch die vorstehende Gleichung $\left(\frac{d\overline{T}}{d\varepsilon}\right)$ berechnen. In der Bezeichnung der Abhandlung (II) und des vor. § ist

$$\begin{aligned} T=&-\Sigma F(i,i',c)\sin(i,i') &&+\Sigma F(i,i',s)\cos(i,i') \\ &-\Sigma G(i,i',c)\sin\{-\eta+(i,i')\} &&+\Sigma G(i,i',s)\cos\{-\eta+(i,i')\} \\ &-\Sigma H(i,i',c)\sin\{\ \eta+(i,i')\} &&+\Sigma H(i,i',s)\cos\{\ \eta+(i,i')\} \end{aligned} \tag{19}$$

Hat man nun durch die Anwendung der Ausdrücke (17) hieraus

$$\begin{aligned} \left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right)=&-\Sigma A(i,i',c)\cos(i,i') &&-\Sigma A(i,i',s)\sin(i,i') \\ &-\Sigma B(i,i',c)\cos\{-\eta+(i,i')\} &&-\Sigma B(i,i',s)\sin\{-\eta+(i,i')\} \\ &-\Sigma C(i,i',c)\cos\{\ \eta+(i,i')\} &&-\Sigma C(i,i',s)\sin\{\ \eta+(i,i')\} \end{aligned}$$

erhalten, und setzt

$$\left(\frac{d\overline{T}}{d\varepsilon}\right)=-\Sigma D(i,i',c)\cos(i,i')-\Sigma D(i,i',s)\sin(i,i')$$

so giebt die Gleichung (18)

$$\begin{aligned} D(i,i')=&A(i,i')+B(i+1,i')+C(i-1,i') \\ &-G(i+1,i')+H(i-1,i') \end{aligned}$$

wo ich die Indices $c$ und $s$ weggelassen habe, weil die Gleichung ohne Aenderung für beide gilt. Für die Reihe

$$\frac{ae\sin\varepsilon}{r}=2\beta\sin\varepsilon+2\beta^2\sin 2\varepsilon+2\beta^3\sin 3\varepsilon+\ldots$$

ergab sich in unserm Beispiel der folgende Werth

$$\begin{aligned} \frac{ae\sin\varepsilon}{r}=&2(8{,}62840)\sin\varepsilon+2(7{,}2568)\sin 2\varepsilon \\ &+2(5{,}8852)\sin 3\varepsilon+2(4{,}514)\sin 4\varepsilon \end{aligned}$$

und mit diesen numerischen Werthen der Coefficienten wird

$$\begin{aligned} T\frac{ae\sin\varepsilon}{r}=&\Sigma\left\{\begin{matrix}\beta F(i-1,i',c)+\beta^2F(i-2,i',c)+\text{etc.}\\ -\beta F(i+1,i',c)-\beta^2F(i+2,i',c)-\text{etc.}\end{matrix}\right\}\cos(i,i') \\ &+\Sigma\left\{\begin{matrix}\beta F(i-1,i',s)+\beta^2F(i-2,i',s)+\text{etc.}\\ -\beta F(i+1,i',s)-\beta^2F(i+2,i',s)-\text{etc.}\end{matrix}\right\}\sin(i,i') \end{aligned} \tag{20}$$

Digitized by Google

$$+\Sigma'\left\{\begin{matrix}\beta G(i-1,i',c)+\beta^2 G(i-2,i',c)+\text{etc.}\\ -\beta G(i+1,i',c)-\beta^2 G(i+2,i',c)-\text{etc.}\end{matrix}\right\}\cos\{-\eta+(i,i')\}$$

$$+\Sigma'\left\{\begin{matrix}\beta G(i-1,i',s)-\beta^2 G(i-2,i',s)+\text{etc.}\\ -\beta G(i+1,i',s)-\beta^2 G(i+2,i',s)-\text{etc.}\end{matrix}\right\}\sin\{-\eta+(i,i')\}$$

$$+\Sigma'\left\{\begin{matrix}\beta H(i-1,i',c)+\beta^2 H(i-2,i',c)+\text{etc.}\\ -\beta H(i+1,i',c)+\beta^2 H(i+2,i',c)-\text{etc.}\end{matrix}\right\}\cos\{\eta+(i,i')\}$$

$$+\Sigma'\left\{\begin{matrix}\beta H(i-1,i',c)+\beta^2 H(i-2,i',s)+\text{etc.}\\ -\beta H(i+1,i',s)-\beta^2 H(i+2,i',s)-\text{etc.}\end{matrix}\right\}\sin\{\eta+(i,i')\}$$

## 40.

Da zufolge der Gleichungen (64) (I) und (69) (I)

$$B=V+X$$
$$C=2\{T+X+\overline{T}\}$$

ist, so sind noch die Hülfsgrössen $V$ und $X$ zu berechnen, während $\overline{T}$ durch $T$ gegeben ist, und dem Vorhergehenden zufolge

$$\overline{T}=-\Sigma'\{F(i,i',c)+G(i+1,i',c)+H(i-1,i',c)\}\sin(i,i')$$
$$+\Sigma'\{F(i,i',s)+G(i+1,i',s)+H(i-1,i',s)\}\cos(i,i')$$

ist. Für unser Beispiel sind die Coefficienten von $\overline{T}$ schon in der Tafel für $T$ des Art. 57 (II) angegeben. Die Function $V$ wird zufolge (65) (I) aus den Coefficienten von

$$\left(\frac{d.ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{dt}\right)\text{ und }\left\{ar^2\left(\frac{d^2\Omega}{dr^2}\right)+ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\right\}$$

auf dieselbe Art berechnet, wie $T$ aus denen von

$$a\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)\text{ und }ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

nemlich durch die Ausdrücke (15) (II). Sei der Ausdruck für $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$, wie er für unser Beispiel im Art. 84 (I) angegeben ist, der folgende

$$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)=\Sigma P(i,i',c)\cos(i,i')+\Sigma P(i,i',s)\sin(i,i')$$

dann muss man in (17)

$$P(i,i'c)\text{ statt }[i,i',c],\text{ und }P(i,i',s)\text{ statt }[i,i',s]$$

setzen, wodurch man

$$\left(\frac{d\ ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{dt}\right)=-\Sigma'\{i,i'c\}\sin(i,i')+\Sigma'\{i,i',s\}\cos(i,i')$$

Digitized by Google

erhält. Nennt man ferner den Ausdruck für $ar^2\left(\frac{d^2\Omega}{dr^2}\right)+ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$, so wie er für unser Beispiel in Art. 84 (I) angegeben ist,

$$ar^2\left(\frac{d^2\Omega}{dr^2}\right)+ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)=\Sigma\left\{[i,i',c]\right\}\cos(i,i')+\Sigma\left\{[i,i',s]\right\}\sin(i,i')$$

und substituirt

$$\{i,i',c\} \text{ für } b(i,i',c) \text{ und } \left\{[i,i',c]\right\} \text{ für } c(i,i',c)$$

in die (15) (II), so wie

$$\{i,i',s\} \text{ für } b(i,i',s) \text{ und } \left\{[i,i',s]\right\} \text{ für } c(i,i',s)$$

in die analogen Ausdrücke, so bekommt man $V$ in derselben Form, die für $T$ unter (19) angegeben wurde. Die Coefficienten der Sinusse bekommt man mit umgekehrtem, und die der Cosinusse mit wahrem Zeichen.

## 41.

Die Berechnung von $X$ ist der von $T$ und $V$ ähnlich, nur haben hier die Multiplicatoren andere Werthe. Führt man in die unter (67) (I) gegebenen Ausdrücke von $M'$ und $N'$ die imaginären Exponentialfunctionen ein, die im §. 4 (II) auch angewandt wurden, so wird

$$M'=\frac{1}{\cos^2\varphi}\Big\{-2e^2+ey+e\frac{1}{y}-\tfrac{1}{2}e^2vy-\tfrac{1}{2}e^2\frac{1}{vy}+ev+e\frac{1}{v}-(1-\tfrac{1}{2}e^2)\frac{v}{y}-(1-\tfrac{1}{2}e^2)\frac{y}{v}\Big\}$$

$$N'\sqrt{-1}=\frac{1}{\cos^2\varphi}\Big\{ey-e\frac{1}{y}-\tfrac{1}{2}e^2vy+\tfrac{1}{2}e^2\frac{1}{vy}+(1-\tfrac{1}{2}e^2)\frac{v}{y}-(1-\tfrac{1}{2}e^2)\frac{y}{v}\Big\}$$

und wegen (66) (I) ergiebt sich

$$\begin{aligned}2X\,d\varepsilon=&\frac{dy}{y}\Big\{E_0+E_1y+E_1\frac{1}{y}+\frac{1}{v}\Big[F_{-1}\frac{1}{y}+F_0+F_1y\Big]\\&+v\Big[F_{-1}y+F_0+F_1\frac{1}{y}\Big]\Big\}\,ay\left(\frac{d\Omega}{dy}\right)\\&+\frac{dy}{y}\Big\{G_1y-G_1\frac{1}{y}+\frac{1}{v}\Big[H_{-1}\frac{1}{y}+H_1y\Big]\\&-v\Big[H_{-1}y+H_1\frac{1}{y}\Big]\Big\}\,ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\end{aligned}$$

wo

$$E_0=-\frac{2e^2}{\cos^2\varphi},\quad E_1=\frac{e}{\cos^2\varphi}$$

$$F_{-1}=-\frac{e^2}{2\cos^2\varphi},\quad F_0=\frac{e}{\cos^2\varphi},\quad F_1=-\frac{2-e^2}{2\cos^2\varphi}$$

$$G_1=-\frac{e}{\cos^2\varphi},\quad H_{-1}=-\frac{e^2}{2\cos^2\varphi},\quad H_1=\frac{2-e^2}{2\cos^2\varphi}$$

ist. Nach der Substitution der im §. 4 (II) angegebenen Entwickelungen von $ay\left(\frac{d\Omega}{dy}\right)$ und $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ bekommt man

Digitized by Google

$$2X\,ds = \frac{dy}{y}\,\Sigma'\Big\{J(i,i',c) + \frac{1}{v}K(i,i',c) + vL(i,i',c)\Big\}\pi'y^{i-i'}\cos$$
$$-\sqrt{-1}.\frac{dy}{y}\,\Sigma'\Big\{J(i,i',s) + \frac{1}{v}K(i,i',s) + vL(i,i',s)\Big\}\pi'y^{i-i'}\sin$$

oder nach dem Uebergang zum Reellen

$$\begin{aligned}X = &-\Sigma J(i,i',c)\sin(i,i') \qquad +\Sigma J(i,i',s)\cos(i,i')\\ &-\Sigma K(i,i',c)\sin\{-\eta+(i,i')\}+\Sigma K(i,i',s)\cos\{-\eta+(i,i')\}\\ &-\Sigma L(i,i',c)\sin\{\ \eta+(i,i')\}+\Sigma L(i,i',s)\cos\{\ \eta+(i,i')\}\end{aligned}$$

wo

$$\begin{aligned}(21)\qquad J(i,i') = &E_0 b(i,i') \qquad +E_1 b(i-1,i') \quad +E_1 b(i+1,i')\\ &\qquad\qquad +G_1 c(i-1,i') \quad -G_1 c(i+1,i')\\ K(i,i') = &F_{-1} b(i+1,i')+F_0 b(i,i') \qquad +F_1 b(i-1,i')\\ &\qquad\qquad +H_{-1} c(i+1,i')+H_1 c(i-1,i')\\ L(i,i') = &F_{-1} b(i-1,i')+F_0 b(i,i') \qquad +F_1 b(i+1,i')\\ &\qquad\qquad -H_{-1} c(i-1,i')-H_1 c(i+1,i')\end{aligned}$$

und ich die Indices $c$ und $s$ weggelassen habe, um anzudeuten, dass diese Ausdrücke unverändert für jeden derselben Geltung haben. Die $b$ und $c$ Coefficienten sind hier dieselben, die im §. 4 (II) vorkommen, und bei der Berechnung der $J$, $K$ und $L$ Coefficienten treten hier ähnliche Vereinfachungen ein wie dort. Auch brauchen hier die $J$ Coefficienten nicht durch die obige Formel berechnet zu werden, sondern man kann sie auf einfachere Art aus den $K$ und $L$ Coefficienten erhalten, nachdem man die numerischen Werthe dieser durch die obigen Formeln berechnet hat.

Da nach der Verwandelung von $\eta$ in $\epsilon$

$$\overline{X} = -\frac{2r}{\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right);\quad \overline{T} = \frac{r}{\cos\varphi}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)$$

wird, so wird nothwendig

$$J(i,i')+K(i+1,i')+L(i-1,i') = -2\{F(i,i')+G(i+1,i')+H(i-1,i')\}$$

wo wieder aus derselben Ursache wie oben die Indices $c$ und $s$ weggelassen worden sind. Setzt man also

$$\Pi(i,i') = F(i,i')+G(i+1,i')+H(i-1,i')$$

wo also die $\Pi$ Coefficienten die von $\overline{T}$ sind, so wird

$$J(i,i') = -\{K(i+1,i')+L(i-1,i')+2\Pi(i,i')\}$$

welche zur Berechnung der $J$ Coefficienten dient. Wenn man will, so kann man diese Gleichung zur Controle anwenden, und die $J$ Coefficienten ausserdem direct durch die Formel (21) berechnen. Einfacher

Digitized by Google

ist es jedoch, dieselben aus der vorstehenden Formel zu berechnen und die Berechnung der $K$ und $L$ Coefficienten dadurch zu controliren, dass man die Summen der $b$ und $c$ Coefficienten mit einführt, wie im §. 4 (II) auseinandergesetzt wurde.

## 42.

Da zufolge (72) (I)

$$D = Ma^2\left(\frac{d^2\Omega}{de\,dZ}\right) + N\left\{a^2r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,dZ}\right) + a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\right\}$$
$$E = Ma^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$$

ist, so müssen hier vor allen Dingen die Coefficienten von $a^2\left(\frac{d^2\Omega}{de\,dZ}\right)$ berechnet werden. Da man diese aber auf dieselbe Art aus denen von $a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$ erhält, wie die Coefficienten von $\left(\frac{d.ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{de}\right)$ aus denen von $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ erhalten wurden, so kann ich auf die im Vorhergehenden enthaltene Auseinandersetzung dieser Rechnung verweisen.

Setzt man hierauf

$$a^2\left(\frac{d^2\Omega}{de\,dZ}\right) = \Sigma R(i,i',c)\cos(i,i') - \Sigma R(i,i',s)\sin(i,i')$$

und

$$a^2r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,dZ}\right) + a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = \Sigma S(i,i',c)\sin(i,i') + \Sigma S(i,i',s)\cos(i,i')$$

und substituirt beides für die Indices $c$ und $s$

$$R(i,i') \text{ für } b(i,i') \text{ und } S(i,i') \text{ für } c(i,i')$$

in die Ausdrücke (15) (II) und (17) (II), so ergiebt sich $D$ in folgender Form

$$\begin{aligned} D = {} & \Sigma F(i,i',c)\cos(i,i') - \Sigma F(i,i',s)\sin(i,i') \\ & + \Sigma G(i,i',c)\cos\{-\eta+(i,i')\} - \Sigma G(i,i',s)\sin\{-\eta+(i,i')\} \\ & + \Sigma H(i,i',c)\cos\{\eta-(i,i')\} - \Sigma H(i,i',s)\sin\{\eta+(i,i')\} \end{aligned}$$

Setzt man endlich

$$a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = \Sigma T(i,i',c)\sin(i,i') + \Sigma T(i,i',s)\cos(i,i')$$

und beides für die Indices $c$ und $s$

$$T(i,i') \text{ für } b(i,i') \text{ und die Null für } c(i,i')$$

in die Ausdrücke (15) (II) und (17) (II), so ergiebt sich

$$\begin{aligned} E = {} & \Sigma F(i,i'c)\sin(i,i') + \Sigma F(i,i',s)\cos(i,i') \\ & + \Sigma G(i,i',c)\sin\{-\eta+(i,i')\} + \Sigma G(i,i',s)\cos\{-\eta+(i,i')\} \\ & + \Sigma H(i,i',c)\sin\{\eta+(i,i')\} + \Sigma H(i,i',s)\cos\{\eta+(i,i')\} \end{aligned}$$

Digitized by Google

Man kann auch für die beiden letzten Glieder des Ausdrucks (15) ein anderes Verfahren anwenden. Man berechne sofort die drei Producte

$$a^2\left(\frac{d^2\Omega}{dz\,dZ}\right)\frac{u}{\cos i}\,;\quad\left\{a^2r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,dZ}\right)+a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\right\}\frac{u}{\cos i}\,;\quad a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\frac{u_1}{\cos i}$$

und setze hierauf

$$a^2\left(\frac{d^2\Omega}{dz\,dZ}\right)\frac{u}{\cos i}+a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\frac{u_1}{\cos i}=$$
$$-\Sigma U(i,i',c)\sin(i,i')+\Sigma U(i,i',s)\cos(i,i')$$

und

$$\left\{a^2r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,dZ}\right)+a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\right\}\frac{u}{\cos i}=$$
$$\Sigma V(i,i',c)\cos(i,i')+\Sigma V(i,i',s)\sin(i,i')$$

Substituirt man dann

$$U(i,i')\text{ für }b(i,i')\text{ und }V(i,i')\text{ für }c(i,i')$$

in die Ausdrücke (15) (II) und (17) (II), so bekommt man

$$D\frac{u}{\cos i}+E\frac{u_1}{\cos i}=$$
$$-\Sigma F(i,i',c)\sin(i,i')+\Sigma F(i,i',s)\cos(i,i')$$
$$-\Sigma G(i,i',c)\sin\{-\eta+(i,i')\}+\Sigma G(i,i',s)\cos\{-\eta+(i,i')\}$$
$$-\Sigma H(i,i',c)\sin\{\ \eta+(i,i')\}+\Sigma H(i,i',s)\cos\{\ \eta+(i,i')\}$$

Dieses zweite Verfahren scheint auf den ersten Anblick etwas kürzer zu sein wie das erste, allein es ist in der That unbequemer und minder zweckmässig. Die Controlirung der Rechnung wird schwieriger, etwa begangene und nachher sich zeigende Rechnungsfehler sind schwerer aufzufinden und mühsamer zu berichtigen, auch muss man bei der Anwendung desselben wegen der Säcularänderungen und der kleinen Divisoren mehr Glieder mit mehr wie der gewöhnlichen Anzahl von Decimalen berechnen. Ich habe mich durch die Anwendung desselben von diesen Nachtheilen überzeugt, und daher schliesslich das erste Verfahren vorgezogen.

## 43.

Ich werde nun für unser Beispiel die numerischen Werthe der im Vorhergehenden erklärten Hülfsgrössen geben.

Digitized by Google

| $i, i'$ | $\left(\frac{d.ar\left(\frac{d\Omega}{dt}\right)}{dt}\right)$ | | $a^2\left(\frac{d^2\Omega}{dtdz}\right)$ | |
|---|---|---|---|---|
| | −sin | cos | cos | −sin |
| 0,0 | | 0 | 0 | |
| 1,0 | −2″.036 | −0″.557 | −2″.698 | −14″.550 |
| 2,0 | −6.170 | −2.249 | +1.270 | +0.922 |
| 3,0 | +0.538 | +0.822 | +0.696 | +1.218 |
| 4,0 | +0.342 | +0.192 | −0.222 | −0.064 |
| −3,−1 | +0.18 | +0.24 | −0.01 | −0.33 |
| −2,−1 | +1.13 | +0.30 | +0.91 | +0.77 |
| −1,−1 | −1.46 | −2.06 | +0.59 | +1.80 |
| 0,−1 | +0.01 | +0.14 | +0.05 | +0.06 |
| 1,−1 | −4.00 | −11.82 | −3.13 | −2.14 |
| 2,−1 | +1.12 | −0.54 | +16.60 | +2.08 |
| 3,−1 | −0.34 | +7.41 | −0.35 | +0.54 |
| 4,−1 | +0.38 | −0.41 | −1.22 | +0.27 |
| −2,−2 | +0.18 | −0.10 | +0.32 | +0.10 |
| −1,−2 | 0.00 | −0.75 | −0.51 | +0.44 |
| 0,−2 | −0.18 | +0.16 | −0.31 | −0.29 |
| 1,−2 | +7.06 | −6.92 | −11.14 | +10.37 |
| 2,−2 | −64.55 | +45.77 | +4.67 | −2.79 |
| 3,−2 | −5.09 | +0.44 | −5.51 | +12.09 |
| 4,−2 | +6.44 | −1.79 | −0.35 | +0.32 |
| 5,−2 | −0.13 | −0.15 | +0.08 | −0.97 |
| −1,−3 | −0.05 | −0.12 | −0.12 | +0.19 |
| 0,−3 | +0.02 | +0.05 | +0.04 | −0.16 |
| 1,−3 | +0.09 | −1.16 | −0.95 | +4.16 |
| 2,−3 | −22.99 | −4.18 | −7.22 | −16.04 |
| 3,−3 | +53.84 | +41.29 | +0.19 | +5.05 |
| 4,−3 | +3.28 | +5.99 | −6.75 | −5.96 |
| 5,−3 | −2.89 | −4.31 | −0.42 | −0.45 |
| 6,−3 | −0.11 | −0.09 | +0.64 | +0.25 |
| 0,−4 | +0.02 | +0.04 | +0.01 | −0.04 |
| 1,−4 | −0.22 | −0.67 | −0.07 | +0.74 |
| 2,−4 | −3.64 | −0.16 | −5.36 | −3.49 |
| 3,−4 | +8.74 | +24.95 | +14.30 | −1.32 |
| 4,−4 | +16.90 | −45.29 | −3.79 | −4.43 |
| 5,−4 | +4.36 | −5.09 | +4.72 | −2.95 |
| 6,−4 | −2.23 | +2.87 | +0.52 | −0.32 |
| 1,−5 | −0.01 | −0.20 | | |
| 2,−5 | −1.05 | +0.44 | | |
| 3,−5 | +0.60 | +5.36 | | |
| 4,−5 | +19.06 | −13.83 | | |
| 5,−5 | −30.85 | −2.06 | | |
| 6,−5 | −5.20 | −1.99 | | |
| 7,−5 | +2.21 | +0.77 | | |
| 1,−6 | 0.00 | −0.05 | | |
| 2,−6 | −0.34 | +0.10 | | |
| 3,−6 | +0.56 | +1.25 | | |
| 4,−6 | +5.68 | −2.07 | | |
| 5,−6 | −14.97 | −10.92 | | |
| 6,−6 | +3.92 | +18.01 | | |
| 7,−6 | −0.03 | +4.27 | | |



Digitized by Google

| | $\left(\frac{dT}{dt}\right)$ | | $T\frac{ae\sin\varepsilon}{r}$ | | $V$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $i,i'$ | −cos | −sin | cos | sin | −sin | cos |
| 0, 0, 0 | 0 | | −0″.142 | | | −0″.22 |
| −1, 1, 0 | −27.200 | +0.068 | +0.054 | −0.055 | −64.76 | +0.22 |
| 0, 1, 0 | +1.415 | +0.367 | −0.262 | −0.098 | +2.33 | +1.30 |
| −1, 2, 0 | +3.338 | +0.766 | −1.107 | +0.019 | +3.76 | +1.33 |
| 1, 0, 0 | 0 | 0 | +1.461 | +0.145 | −4.33 | −2.84 |
| 2, 0 | +12.298 | +4.480 | +0.075 | +0.037 | +18.79 | +6.95 |
| | −3.090 | −1.182 | +0.023 | +0.014 | −0.45 | −0.22 |
| | −7.230 | −2.622 | −0.083 | −0.062 | −24.77 | −9.18 |
| 3, 0 | −1.017 | −1.578 | +0.262 | +0.096 | −1.59 | −2.47 |
| | −0.428 | +0.176 | −0.043 | −0.017 | −0.37 | −0.04 |
| | +1.016 | +1.328 | −0.311 | −0.113 | +2.38 | +3.32 |
| −2, −1 | +1.64 | +0.23 | −0.05 | −0.07 | −3.20 | −0.64 |
| | −1.11 | −0.22 | +0.10 | +0.14 | +4.84 | +1.26 |
| | +0.15 | +0.36 | −0.03 | −0.04 | −0.70 | −0.59 |
| −1, −1 | −1.18 | −1.68 | −0.02 | +0.02 | +4.92 | +6.59 |
| | +0.02 | +0.01 | +0.14 | +0.03 | −10.50 | −13.93 |
| | −1.19 | −1.83 | −0.11 | −0.09 | +3.59 | +4.87 |
| 0, −1 | −0.08 | −0.19 | −0.14 | −0.40 | −1.43 | −3.65 |
| | −2.13 | −0.67 | −0.15 | −0.33 | −5.09 | −1.15 |
| | −2.86 | −2.46 | +0.30 | +0.86 | +7.87 | +8.17 |
| 1, −1 | +3.94 | +14.02 | +0.06 | −0.09 | +11.89 | +35.25 |
| | +2.71 | +9.11 | −0.12 | 0.00 | +4.67 | +15.48 |
| | −0.07 | −0.03 | +0.03 | +0.15 | −20.45 | −62.33 |
| 2, −1 | −3.80 | +2.31 | +0.16 | +0.70 | −3.21 | +3.40 |
| | +1.94 | −2.61 | +0.06 | +0.14 | +1.61 | −1.89 |
| | +1.91 | −0.87 | −0.26 | −1.07 | +2.56 | −3.82 |
| 3, −1 | +0.85 | −16.83 | −0.06 | +0.06 | +1.15 | −22.39 |
| | −0.26 | +5.02 | +0.03 | −0.03 | −0.23 | +3.54 |
| | −0.68 | +12.53 | +0.06 | −0.07 | −1.39 | +26.42 |
| −1, −2 | −0.05 | −0.48 | −0.02 | +0.02 | +0.25 | +1.94 |
| | +0.07 | −0.06 | +0.10 | −0.12 | −0.12 | −5.22 |
| | +0.15 | −1.00 | −0.06 | +0.08 | −0.38 | +2.85 |
| 0, −2 | +0.41 | −0.36 | +0.43 | −0.36 | +4.98 | −2.18 |
| | −2.74 | +3.08 | −0.49 | +0.06 | −8.67 | +11.07 |
| | −1.36 | +1.77 | −0.50 | +0.51 | +5.07 | −7.03 |
| 1, −2 | −16.64 | +13.60 | −3.79 | +2.66 | −30.31 | +27.39 |
| | +12.38 | −7.34 | +1.06 | −0.70 | +12.23 | −6.29 |
| | +2.71 | −1.89 | +3.97 | −2.83 | +34.26 | −34.65 |
| 2, −2 | +179.93 | −127.30 | −0.77 | +0.49 | +193.64 | −137.62 |
| | −82.20 | +58.17 | +0.32 | −0.13 | −53.82 | +38.71 |
| | −92.84 | +65.84 | +0.79 | −0.57 | −204.36 | +144.98 |
| 3, −2 | +10.55 | +2.21 | +3.96 | −2.72 | +14.01 | +0.08 |
| | −6.85 | +0.26 | −1.20 | +0.83 | −5.34 | −0.24 |
| | −3.91 | −3.66 | −4.09 | +2.80 | −12.49 | −0.79 |
| 4, −2 | −15.96 | +4.38 | +0.35 | −0.11 | −19.59 | +5.35 |
| | +4.99 | −1.36 | −0.13 | +0.04 | +4.27 | −1.20 |
| | +13.14 | −3.56 | −0.30 | +0.08 | +22.03 | −5.94 |

Digitized by Google

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,−3 | +0".11 | −0".07 | +0".06 | −0".06 | −0".24 | −0".15 |
| | −1.10 | +0.45 | −0.11 | −0.01 | −4.15 | +1.81 |
| | −0.89 | +0.27 | 0.00 | +0.09 | +4.52 | −1.01 |
| 1,−3 | −3.77 | +1.43 | −1.14 | +0.08 | −3.94 | +3.11 |
| | +6.28 | +0.52 | +0.34 | +0.02 | +10.36 | +2.20 |
| | +1.32 | +0.01 | +1.24 | −0.08 | −2.66 | −6.10 |
| 2,−3 | +60.33 | +0.84 | +2.09 | +1.75 | +76.54 | +9.02 |
| | −29.84 | −2.21 | −0.57 | −0.52 | −24.82 | −5.20 |
| | −32.94 | −1.53 | −2.19 | −1.81 | −82.22 | −10.47 |
| 3,−3 | −155.77 | −118.60 | +1.31 | +0.16 | −162.28 | −123.39 |
| | +65.14 | +49.86 | −0.44 | −0.09 | +49.59 | +37.45 |
| | +106.79 | +80.27 | −1.35 | −0.16 | +167.28 | +126.75 |
| 4,−3 | −5.36 | −14.74 | −2.20 | −1.78 | −8.15 | −17.00 |
| | +3.25 | +7.16 | +0.69 | +0.55 | +2.66 | +5.96 |
| | +1.71 | +9.25 | +2.26 | +1.81 | +7.08 | +16.05 |
| 5,−3 | +7.58 | +10.96 | −0.17 | −0.25 | +8.77 | +13.19 |
| | −2.44 | −3.31 | +0.06 | +0.09 | −2.13 | −3.18 |
| | −6.53 | −9.67 | +0.15 | +0.23 | −9.63 | −14.57 |
| 1,−4 | −0.51 | +0.32 | −0.18 | −0.02 | +0.06 | +2.03 |
| | +1.33 | +0.97 | +0.05 | +0.06 | +2.42 | +2.33 |
| | +0.27 | +0.05 | +0.20 | −0.01 | −2.11 | −5.05 |
| 2,−4 | +9.60 | +4.11 | +0.35 | +0.89 | +12.02 | +4.17 |
| | −4.70 | −5.72 | −0.08 | −0.28 | −4.02 | −7.92 |
| | −5.28 | −2.09 | −0.37 | −0.95 | −12.73 | −0.10 |
| 3,−4 | −23.74 | −67.99 | +0.72 | −1.35 | −24.27 | −81.12 |
| | +9.24 | +30.67 | −0.23 | +0.38 | +7.68 | +27.45 |
| | +15.75 | +47.70 | −0.74 | +1.40 | +23.37 | +84.88 |
| 4,−4 | −48.89 | +133.74 | −0.23 | −1.04 | −49.86 | +136.50 |
| | +19.69 | −53.26 | +0.06 | +0.36 | +15.57 | −43.07 |
| | +36.57 | −102.53 | +0.24 | +1.07 | +50.34 | −139.34 |
| 5,−4 | −11.79 | +11.36 | −0.58 | +1.42 | −12.74 | +13.86 |
| | +5.14 | −5.23 | +0.18 | −0.45 | +4.48 | −4.60 |
| | +8.72 | −7.28 | +0.59 | −1.45 | +12.28 | −12.94 |
| 6,−4 | +6.01 | −7.82 | −0.13 | +0.17 | +6.86 | −8.79 |
| | −1.87 | +2.52 | +0.05 | −0.06 | −1.79 | +2.29 |
| | −5.48 | +7.03 | +0.12 | −0.16 | −7.47 | +9.54 |
| 2,−5 | +1.63 | +0.64 | +0.03 | +0.19 | +3.24 | −0.54 |
| | −0.02 | −1.72 | +0.02 | −0.07 | +0.52 | −2.64 |
| | −1.10 | −0.16 | −0.04 | −0.20 | −4.90 | +2.84 |
| 3,−5 | +0.73 | −15.60 | +0.54 | −0.43 | +0.92 | −17.97 |
| | −2.96 | +7.79 | −0.18 | +0.42 | −4.38 | +7.31 |
| | −0.18 | +10.79 | −0.57 | +0.45 | +1.35 | +17.91 |
| 4,−5 | −52.67 | +41.06 | −0.78 | −0.26 | −61.37 | +41.61 |
| | +22.57 | −16.49 | +0.22 | +0.10 | +21.12 | −13.30 |
| | +41.05 | −31.31 | +0.81 | +0.26 | +63.50 | −42.26 |
| 5,−5 | +92.37 | +5.25 | −0.64 | +0.38 | +92.87 | +5.36 |
| | −35.66 | −2.20 | +0.22 | −0.12 | −29.75 | −1.66 |
| | −75.17 | −3.52 | +0.65 | −0.39 | −94.29 | −4.93 |
| 6,−5 | +12.98 | +5.93 | +0.79 | +0.08 | +14.65 | +6.01 |
| | −5.50 | −2.44 | −0.25 | −0.03 | −4.92 | −1.99 |
| | −9.62 | −4.83 | −0.81 | −0.08 | −13.98 | −6.05 |



Digitized by Google

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 7, −5 | −6″.29 | −2″.18 | +0″.13 | +0″.05 | −6″.85 | −2″.41 |
| | +2.08 | +0.69 | −0.05 | −0.02 | +1.95 | +0.61 |
| | +5.79 | +2.04 | −0.13 | −0.04 | +7.32 | +2.66 |
| 2, −6 | +0.39 | +0.12 | +0.01 | +0.04 | +1.15 | −0.05 |
| | +0.11 | −0.36 | +0.01 | −0.01 | +0.13 | −0.61 |
| | −0.32 | −0.04 | −0.02 | −0.04 | −1.74 | +0.51 |
| 3, −6 | +0.30 | −2.93 | +0.16 | −0.07 | −0.87 | −4.02 |
| | −1.50 | +1.06 | −0.06 | 0.00 | −2.02 | +0.28 |
| | +0.15 | +2.20 | −0.17 | +0.09 | +2.63 | +5.26 |
| 4, −6 | −16.94 | +4.71 | −0.37 | −0.27 | −19.10 | +4.69 |
| | +8.20 | −0.43 | +0.11 | +0.09 | +8.08 | +0.56 |
| | +12.96 | −3.86 | +0.38 | +0.28 | +18.75 | −5.79 |
| 5, −6 | +44.09 | +30.03 | −0.09 | +0.44 | +45.81 | +35.10 |
| | −17.38 | −12.49 | +0.04 | −0.13 | −15.13 | −12.28 |
| | −35.96 | −24.84 | +0.08 | −0.46 | −46.54 | −36.07 |
| 6, −6 | −12.70 | −54.29 | +0.36 | +0.32 | −12.42 | −54.06 |
| | +4.70 | +20.44 | −0.12 | −0.11 | +3.98 | +17.45 |
| | +11.29 | +45.85 | −0.37 | −0.33 | +13.02 | +54.65 |
| 7, −6 | +0.81 | −11.08 | −0.07 | −0.37 | +0.25 | −12.09 |
| | −0.42 | +4.41 | +0.02 | +0.12 | −0.08 | +3.93 |
| | −0.73 | +8.89 | +0.07 | +0.38 | −0.36 | +11.70 |

| | *X* | | *D* | | *E* | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| *i*, *i′* | −sin | cos | cos | −sin | sin | cos |
| 0,0,0 | | −0″.12 | −1″.188 | | | −15″.048 |
| −1,1,0 | +26″.21 | −0.01 | +1.188 | −14″.603 | +0″.233 | +10.878 |
| 0,1,0 | −2.76 | −0.16 | +8.372 | +43.192 | +8.173 | +44.231 |
| −1,2,0 | −1.25 | −0.46 | +2.654 | +14.788 | −5.506 | −29.495 |
| 1,0,0 | +3.00 | +0.72 | −14.001 | −72.071 | −5.443 | −29.867 |
| 2,0 | +0.13 | +0.08 | −3.584 | −1.931 | −2.132 | −2.606 |
| | −1.06 | −0.38 | −0.718 | −1.757 | +1.362 | +1.499 |
| | +5.15 | +1.85 | +5.345 | +3.773 | +1.613 | +2.791 |
| 3,0 | +0.11 | +0.05 | −2.16 | −3.74 | −0.64 | −1.16 |
| | +0.08 | +0.11 | +0.23 | +0.09 | +0.45 | +0.80 |
| | −0.46 | −0.51 | +2.70 | +4.96 | +0.38 | +0.71 |
| −2, −1 | +0.11 | +0.05 | −2.87 | −2.56 | +1.28 | +0.95 |
| | −0.91 | −0.19 | +4.46 | +3.61 | −0.78 | −0.48 |
| | +0.29 | +0.11 | −0.55 | −0.04 | −0.87 | −0.67 |
| −1, −1 | +0.32 | +0.19 | −0.16 | −4.45 | +2.82 | +5.98 |
| | +1.89 | +2.62 | +2.44 | +9.66 | −2.48 | −4.35 |
| | −1.18 | −1.51 | −3.29 | −4.36 | −1.72 | −3.90 |
| 0, −1 | −0.63 | −1.53 | −0.89 | −0.22 | −25.99 | −14.79 |
| | +2.46 | +1.45 | −31.47 | −18.08 | +17.57 | +9.99 |
| | −2.61 | −1.92 | +33.14 | +18.40 | +17.35 | +9.98 |
| 1, −1 | −0.10 | −0.14 | +10.78 | +5.99 | +10.12 | +6.70 |
| | −2.60 | −8.17 | +4.42 | +3.11 | −7.22 | −4.47 |
| | +5.28 | +15.56 | −19.72 | −10.80 | −7.24 | −4.80 |
| 2, −1 | +0.22 | +1.06 | −49.68 | −6.02 | −25.19 | −3.27 |
| | −0.12 | +0.07 | +1.15 | +0.16 | +16.77 | +2.14 |
| | −1.29 | +0.28 | +65.00 | +7.72 | +17.04 | +2.34 |

Digitized by Google

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3,−1 | +0".01 | −0".03 | +0".93 | −1".58 | +0".92 | −0".47 |
| | −0.02 | +0.62 | +0.64 | +0.08 | −0.47 | +0.32 |
| | +0.24 | −4.39 | −1.79 | +2.00 | −1.20 | +0.23 |
| −1,−2 | +0.14 | −0.17 | +2.12 | −1.51 | −1.03 | +1.18 |
| | −0.09 | +1.05 | −3.90 | +3.21 | +0.45 | −0.70 |
| | +0.03 | −0.63 | +0.68 | −1.08 | +0.75 | −0.81 |
| 0,−2 | +0.80 | −0.87 | −1.63 | +3.22 | −9.61 | +3.27 |
| | +2.08 | −2.44 | −8.29 | −1.09 | +7.21 | −2.92 |
| | −1.39 | +1.87 | +12.17 | −4.77 | +6.23 | −2.01 |
| 1,−2 | −5.49 | +3.97 | +33.93 | −31.72 | +33.53 | −31.20 |
| | +0.31 | −1.58 | +10.66 | −9.38 | −22.51 | +20.90 |
| | −9.50 | +9.27 | −56 23 | +52.07 | −22.56 | +20.87 |
| 2,−2 | −0.25 | +0.05 | −14.41 | +9.82 | −7.55 | +4.22 |
| | −2.38 | +1.72 | −0.48 | −0.65 | +5.00 | −2.96 |
| | +62.65 | −44.32 | +19.96 | −13.40 | +5.80 | −3.49 |
| 3,−2 | +0.47 | −0.21 | +16.47 | −36.29 | +5.67 | −12.20 |
| | −0.11 | +0.42 | −2.05 | +4.77 | −3.73 | +8.11 |
| | +1.25 | +1.20 | −19.86 | +43.63 | −3.97 | +8.25 |
| 4,−2 | +0.01 | −0.02 | +0.96 | −0.90 | +0.15 | +0.09 |
| | +0.30 | −0.08 | −0.20 | +0.72 | −0.13 | +0.01 |
| | −3.06 | +0.84 | −1.02 | +0.44 | +0.03 | −0.35 |
| 0,−3 | 0.00 | −0.15 | −0.32 | +1.58 | −1.50 | −0.25 |
| | +0.96 | −0.36 | −1.67 | −3.39 | +1.08 | −0.13 |
| | −0.84 | +0.28 | +2.22 | +0.56 | +0.99 | +0.24 |
| 1,−3 | −1.80 | +0.08 | +1.57 | −15.36 | +3.01 | −12.14 |
| | −1.62 | −0.76 | +2.50 | −2.03 | −1.75 | +8.68 |
| | −0.02 | +1.64 | −3.74 | +24.42 | −2.10 | +7.99 |
| 2,−3 | +3.17 | +2.37 | +21.89 | +48.90 | +10.86 | +24.35 |
| | −0.79 | +0.08 | −0.86 | −1.38 | −7.27 | −16.25 |
| | +20.08 | −0.45 | −28.47 | −64.34 | −7.17 | −16.45 |
| 3,−3 | +0.11 | +0.17 | −1.60 | −16.10 | −0.12 | −5.44 |
| | +0.81 | +0.67 | +0.22 | +1.76 | +0.35 | +3.63 |
| | −35.74 | −27.06 | +2.59 | +20.33 | +0.51 | +4.18 |
| 4,−3 | −0.17 | −0.21 | +20.21 | +17.90 | +5.09 | +4.58 |
| | +0.13 | +0.07 | −3.81 | −3.23 | −3.39 | −3.02 |
| | −0.40 | −2.02 | −23.11 | −20.65 | −3.41 | −3.18 |
| 5,−3 | −0.01 | −0.01 | +1.19 | +1.25 | +0.16 | +0.18 |
| | −0.08 | −0.15 | −0.45 | −0.35 | −0.14 | −0.15 |
| | +1.13 | +1.68 | −1.08 | −1.25 | +0.02 | −0.01 |
| 1,−4 | −0.26 | −0.01 | | | | |
| | −0.48 | −0.57 | | | | |
| | +0.30 | +0.81 | | | | |
| 2,−4 | +0.53 | +1.33 | | | | |
| | −0.16 | +0.94 | | | | |
| | +3.16 | −0.01 | | | | |
| 3,−4 | +0.70 | −2.01 | | | | |
| | +0.15 | +0.34 | | | | |
| | −5.61 | −14.99 | | | | |
| 4,−4 | +0.11 | −0.14 | | | | |
| | +0.16 | −0.33 | | | | |
| | −8.26 | +22.86 | | | | |

Digitized by Google

| | | |
|---|---|---|
| 5,−4 | −0.07 | +0.10 |
| | 0.00 | −0.09 |
| | −1.43 | +1.24 |
| 6,−4 | −0.01 | +0.02 |
| | −0.05 | +0.05 |
| | +0.76 | −0.98 |
| 2,−5 | +0.05 | +0.29 |
| | −0.27 | +0.40 |
| | +0.78 | −0.31 |
| 3,−5 | +0.77 | −0.62 |
| | +0.47 | −0.07 |
| | −0.53 | −3.22 |
| 4,−5 | −1.10 | −0.05 |
| | +0.13 | −0.09 |
| | −8.67 | +6.98 |
| 5,−5 | −0.13 | −0.05 |
| | −0.11 | −0.03 |
| | +12.58 | +0.65 |
| 6,−5 | +0.06 | +0.01 |
| | −0.05 | +0.01 |
| | +1.30 | +0.64 |
| 7,−5 | 0.00 | +0.01 |
| | +0.03 | +0.01 |
| | −0.66 | −0.24 |
| 2,−6 | +0.03 | +0.07 |
| | −0.10 | +0.08 |
| | +0.22 | −0.08 |
| 3,−6 | +0.23 | −0.11 |
| | +0.28 | +0.09 |
| | −0.29 | −0.69 |
| 4,−6 | −0.54 | −0.33 |
| | −0.09 | −0.23 |
| | −2.58 | +1.09 |
| 5,−6 | +0.14 | +0.52 |
| | −0.06 | −0.05 |
| | +5.93 | +3.95 |
| 6,−6 | −0.02 | +0.10 |
| | −0.01 | +0.04 |
| | −1.46 | −6.15 |
| 7,−6 | 0.00 | −0.05 |
| | +0.02 | +0.04 |
| | +0.07 | −0.99 |

Die Anordnung dieser Tafeln ist dieselbe wie die der vorhergehenden, es sind nemlich bei jedem Argumente die drei Glieder angesetzt, die nach der Verwandelung von $\eta$ in $\varepsilon$ sich zu Einem Gliede vereinigen; statt der constanten Glieder selbst ist das Doppelte derselben angesetzt. In den Functionen $\left(\frac{d.ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{d\varepsilon}\right)$, $\left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right)$, $T\frac{ae\sin\varepsilon}{r}$, $V$ und $X$ sind in den Gliedern, welche zu $i'=0$ gehören, die vom Saturn bewirkten Glieder mit aufgenommen worden.

Digitized by Google

## 44.

Für die im Art. 47 (I) entwickelte zur Controle anzuwendende Bedingungsgleichung haben wir

$$\frac{dd\frac{\delta_0}{h}}{dt} = \left(\frac{dT}{d\lambda}\right)\partial\lambda + A'\frac{and\varepsilon}{r} + B'\nu + D'\frac{u}{\cos i} + E'\frac{u_1}{\cos i}$$

wo

$$A' = \left(\frac{dT}{dt}\right) - T\frac{ae\sin\varepsilon}{r}$$

$$B' = \overline{V},\ D' = \overline{D},\ E' = \overline{E}$$

Aus den im Vorhergehenden schon gegebenen Hülfsgrössen fanden sich nach schon erklärten Regeln leicht die folgenden.

| | $\left(\frac{dT}{d\lambda}\right)$ | | $\left(\frac{dT}{de}\right)$ | | $\overline{T}\frac{ae\sin\varepsilon}{r}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $i, i'$ | −sin | cos | −cos | −sin | cos | sin |
| 0,0 | | | 0 | | −0".034 | |
| 1,0 | | | +0".503 | −0".050 | +0.092 | +0".036 |
| 2,0 | | | −4.222 | −1.552 | +0.045 | −0.044 |
| 3,0 | | | +0.411 | +0.546 | −0.092 | −0.034 |
| −2,−1 | | | −0.51 | −0.02 | +0.02 | +0.03 |
| −1,−1 | | | +0.51 | +0.63 | +0.01 | −0.04 |
| 0,−1 | | | +0.03 | +0.06 | +0.04 | +0.43 |
| 1,−1 | | | −1.31 | −3.63 | −0.03 | +0.06 |
| 2,−1 | | | +1.21 | −1.38 | −0.04 | −0.23 |
| 3,−1 | | | −0.35 | +5.72 | +0.03 | −0.04 |
| −1,−2 | | | +0.06 | +0.10 | +0.02 | −0.02 |
| 0,−2 | −14".76 | +11".42 | −0.22 | +0.18 | −0.26 | +0.21 |
| 1,−2 | +58.52 | −41.14 | +8.25 | −6.47 | +1.24 | −0.87 |
| 2,−2 | +16.30 | −10.58 | −60.22 | +42.74 | +0.34 | −0.24 |
| 3,−2 | −62.78 | +43.28 | −1.56 | −2.30 | −1.33 | +0.94 |
| 4,−2 | | | +5.53 | −1.46 | −0.08 | +0.01 |
| 0,−3 | −5.31 | +1.41 | −0.08 | +0.02 | −0.05 | +0.02 |
| 1,−3 | +33.48 | +3.36 | +2.22 | −0.44 | +0.44 | +0.02 |
| 2,−3 | −47.10 | −40.77 | −23.31 | −2.55 | −0.67 | −0.58 |
| 3,−3 | −34.32 | −6.24 | +52.72 | +39.32 | −0.48 | −0.09 |
| 4,−3 | +53.82 | +41.61 | +0.13 | +3.77 | +0.75 | +0.58 |
| 5,−3 | | | −2.62 | −3.85 | +0.04 | +0.07 |
| 1,−4 | | | +0.33 | −0.05 | +0.07 | +0.03 |
| 2,−4 | −8.64 | −33.84 | −3.68 | −2.75 | −0.10 | −0.34 |
| 3,−4 | −23.08 | +40.24 | +7.01 | +25.72 | −0.25 | +0.43 |
| 4,−4 | +6.52 | +35.84 | +15.79 | −45.24 | +0.07 | +0.39 |
| 5,−4 | +17.40 | −46.56 | +3.53 | −2.48 | +0.49 | −0.48 |
| 6,−4 | | | −2.18 | +2.76 | +0.04 | −0.05 |
| 2,−5 | | | −0.54 | −0.53 | +0.01 | −0.08 |
| 3,−5 | −25.50 | +16.15 | −1.40 | +6.14 | −0.21 | +0.44 |
| 4,−5 | +29.10 | +11.20 | +19.77 | −13.80 | +0.25 | +0.40 |
| 5,−5 | +27.40 | −15.45 | −31.15 | −1.15 | +0.23 | −0.13 |
| 6,−5 | −32.45 | −1.95 | −3.48 | −1.97 | −0.27 | −0.03 |
| 7,−5 | | | +2.26 | +0.79 | −0.05 | −0.01 |

Digitized by Google

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,−6 | +0".72 | −2".22 | −0".14 | −0".10 | 0".00 | −0".01 |
| 3,−6 | −10.02 | +1.38 | −0.47 | +1.13 | −0.07 | +0.02 |
| 4,−6 | +17.34 | +15.48 | +6.71 | −0.90 | +0.12 | +0.10 |
| 5,−6 | +5.16 | −19.62 | −15.24 | −11.30 | +0.03 | −0.15 |
| 6,−6 | −17.70 | −16.26 | +1.75 | +18.19 | −0.13 | −0.12 |
| 7,−6 | | | −0.40 | +3.24 | +0.02 | +0.13 |

| $i,i'$ | $\overline{V}$ | | $D$ | | $E$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | −sin | cos | cos | −sin | sin | cos |
| 0,0 | | +0".22 | +1".188 | | | +6".708 |
| 1,0 | +1.76 | −9.18 | −2.975 | −14.091 | −2.776 | −15.134 |
| 2,0 | −6.43 | −2.45 | +1.043 | +0.478 | +0.852 | +1.684 |
| 3,0 | +0.52 | +0.81 | +0.77 | +1.31 | +0.18 | +0.35 |
| −2,−1 | +0.94 | +0.03 | +1.04 | +1.01 | −0.37 | −0.20 |
| −1,−1 | −1.99 | −2.47 | −1.01 | +0.85 | −1.38 | −2.27 |
| 0,−1 | +1.35 | +3.37 | +0.78 | +0.10 | +8.93 | +5.18 |
| 1,−1 | −3.89 | −11.60 | −4.52 | −1.70 | −4.34 | −2.57 |
| 2,−1 | +0.96 | −2.34 | +16.47 | +1.86 | +8.62 | +1.21 |
| 3,−1 | −0.47 | +7.57 | −0.22 | +0.50 | −0.75 | +0.08 |
| −1,−2 | −0.25 | −0.43 | −1.10 | +0.62 | +0.17 | −0.33 |
| 0,−2 | −1.62 | +1.86 | +2.25 | −2.64 | +3.83 | −1.66 |
| 1,−2 | +16.18 | −13.55 | −12.64 | +10.97 | −11.54 | +10.57 |
| 2,−2 | −64.54 | +46.07 | +5.07 | −4.23 | +3.25 | −2.23 |
| 3,−2 | −3.82 | −0.95 | −5.44 | +12.11 | −2.03 | +4.16 |
| 4,−2 | +6.71 | −1.76 | −0.26 | +0.26 | +0.05 | −0.25 |
| 0,−3 | +0.16 | +0.35 | +0.23 | −1.25 | +0.57 | −0.14 |
| 1,−3 | +3.76 | −0.79 | +0.33 | +7.03 | −0.84 | +4.53 |
| 2,−3 | −30.53 | −6.65 | −7.44 | −16.82 | −3.58 | −8.45 |
| 3,−3 | +54.59 | +10.84 | +1.21 | +5.99 | +0.44 | +2.37 |
| 4,−3 | +1.59 | +5.04 | −6.71 | −5.98 | −1.71 | −1.62 |
| 5,−3 | −2.99 | −4.56 | −0.34 | −0.35 | +0.04 | +0.02 |
| 1,−4 | +0.37 | −0.69 | | | | |
| 2,−4 | −4.73 | −3.85 | | | | |
| 3,−4 | +6.78 | +31.21 | | | | |
| 4,−4 | +16.05 | −45.94 | | | | |
| 5,−4 | +4.02 | −3.68 | | | | |
| 6,−4 | −2.40 | +3.04 | | | | |
| 2,−5 | −1.14 | −0.34 | | | | |
| 3,−5 | −2.11 | +7.25 | | | | |
| 4,−5 | +23.25 | −13.95 | | | | |
| 5,−5 | −31.17 | −1.23 | | | | |
| 6,−5 | −4.25 | −2.03 | | | | |
| 7,−5 | +2.42 | +0.86 | | | | |
| 2,−6 | −0.46 | −0.15 | | | | |
| 3,−6 | −0.26 | +1.52 | | | | |
| 4,−6 | +7.73 | −0.54 | | | | |
| 5,−6 | −15.86 | −13.25 | | | | |
| 6,−6 | +4.58 | +18.04 | | | | |
| 7,−6 | −0.19 | +3.54 | | | | |

Es ist hier wieder statt der constanten Glieder das Doppelte derselben angesetzt.

Digitized by Google

## 45.

Da im §. 8 (II) gezeigt worden ist, wie die in den Breitenstörungen enthaltenen, von $D_2''$ und $E_2''$ abhängigen Glieder für sich integrirt werden können, so haben wir hier nur den Ausdruck

$$\frac{d\delta_1 R_0}{d\varepsilon} = \left(\frac{dU}{d\lambda}\right)\delta\lambda + A''\frac{an\delta z}{r} + B''\nu + C''\vartheta\frac{h}{h_0} + D_1''\frac{u}{\cos i} + E_1''\frac{u_1}{\cos i}$$

zu betrachten. Die Function $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ wird hier aus $U$ ebenso berechnet wie $\left(\frac{dT}{d\lambda}\right)$ aus $T$ berechnet worden ist, nemlich durch Anwendung des Ausdrucks (16) auf $U$, und in

$$A'' = \left(\frac{dU}{d\varepsilon}\right) - U\frac{ae\sin\varepsilon}{r}$$

wird $\left(\frac{dU}{d\varepsilon}\right)$ ebenfalls durch Anwendung der Ausdrücke (17) auf $U$ erlangt, gleichwie $U\frac{ae\sin\varepsilon}{r}$ durch (20) erhalten wird, nachdem darin die Coefficienten von $U$ statt der von $T$ substituirt worden sind. Zufolge (86) (I) ist

$$B'' = Y + U$$

und $Y$ ist aus $a^2r\left(\frac{d^2\Omega}{drdZ}\right)$ auf dieselbe Art zusammengesetzt wie $U$ aus $a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$. Substituirt man daher die Coefficienten von $a^2r\left(\frac{d^2\Omega}{drdZ}\right)$ in die Ausdrücke (28) (II) und (30) (II), statt der dort enthaltenen $d$ Coefficienten, so bekommt man $\frac{Y}{\cos i}$ in derselben Form wie der dort abgeleitete Ausdruck für $\frac{U}{\cos i}$. Da ferner

$$C'' = U$$

so ist $\frac{C''}{\cos i}$ unmittelbar gegeben. Geht man von dem Ausdruck (27) (II) zum Reellen über, so bekommt man

$$\begin{aligned}\frac{U}{\cos i} = {} & \Sigma T(i,i',s)\cos(i,i'') && -\Sigma T(i,i',c)\sin(i,i'') \\ & + \Sigma U(i,i',s)\cos\{-\eta+(i,i'')\} && -\Sigma U(i,i',c)\sin\{-\eta+(i,i'')\} \\ & + \Sigma V(i,i',s)\cos\{\ \eta+(i,i'')\} && -\Sigma V(i,i',c)\sin\{\ \eta+(i,i'')\}\end{aligned}$$

in dieser Form bekommt man alle in diesem Artikel betrachteten Functionen.

## 46.

Es wurde ferner (88) (I)

$$\frac{D_1''}{\cos i} = PW; \quad \frac{E_1''}{\cos i} = PW_1$$

gesetzt, wo

$$P = e\sin\varepsilon - e\sin\eta + \sin(\eta-\varepsilon)$$

$$W = (1-e\cos\varepsilon)a^2\left(\frac{d^2\Omega}{dZ^2}\right) + \frac{e\sin\varepsilon}{\cos^2\varphi}\,a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right) - \frac{1+e\cos\varepsilon}{\cos^3\varphi}\,ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

$$W_1 = -\frac{1-e\cos\varepsilon}{\cos^2\varphi}\,a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right) + \frac{e\sin\varepsilon}{\cos^2\varphi}\,ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

Digitized by Google

ist, und es sind daher nun zuerst $W$ und $W_1$ zu entwickeln. Diese Rechnung ist sehr einfach, denn man braucht nur die Coefficienten von $a^3\left(\frac{d^3\Omega}{dz^3}\right)$ mit $\frac{1}{4}e$, die von $a\left(\frac{d\Omega}{dz}\right)$ mit $\frac{1}{\cos^2\varphi}-1$, oder $\mathrm{tg}^2\varphi$, und $\frac{e}{2\cos^2\varphi}$, und die von $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ mit $\frac{e}{2\cos^2\varphi}$ zu multipliciren, und darauf die Producte nach Maassgabe der vorstehenden Ausdrücke zu addiren. Setzt man zu dem Ende

$$a^3\left(\frac{d^3\Omega}{dz^3}\right) = \quad \Sigma f(i,i',c)\cos(i,i'') + \Sigma f(i,i',s)\sin(i,i'')$$

und wie früher

$$a\left(\frac{d\Omega}{dz}\right) = -\Sigma b(i,i',c)\sin(i,i'') + \Sigma b(i,i',s)\cos(i,i'')$$
$$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = \quad \Sigma c(i,i',c)\cos(i,i'') + \Sigma c(i,i',s)\sin(i,i'')$$

so bekommt man

$$W = \Sigma\left\{\begin{matrix} f(i,i',c) - c(i,i',c) & -\frac{e}{2}f(i-1,i',c) + \frac{e}{2\cos^2\varphi}b(i-1,i',c) - \frac{e}{2\cos^2\varphi}b(i+1,i',c) \\ -\mathrm{tg}^2\varphi c(i,i',c) - \frac{e}{2}f(i+1,i',c) - \frac{e}{2\cos^2\varphi}c(i-1,i',c) - \frac{e}{2\cos^2\varphi}c(i+1,i',c) \end{matrix}\right\}\cos(i,i'')$$
$$+\Sigma\left\{\begin{matrix} f(i,i',s) - c(i,i',s) & -\frac{e}{2}f(i-1,i',s) + \frac{e}{2\cos^2\varphi}b(i-1,i',s) - \frac{e}{2\cos^2\varphi}b(i+1,i',s) \\ -\mathrm{tg}^2\varphi c(i,i',s) - \frac{e}{2}f(i+1,i',s) - \frac{e}{2\cos^2\varphi}c(i-1,i',s) - \frac{e}{2\cos^2\varphi}c(i+1,i',s) \end{matrix}\right\}\sin(i,i'')$$

$$W_1 = \Sigma\left\{\begin{matrix} b(i,i',c) & -\frac{e}{2\cos^2\varphi}b(i-1,i',c) - \frac{e}{2\cos^2\varphi}b(i+1,i',c) \\ +\mathrm{tg}^2\varphi b(i,i',c) + \frac{e}{2\cos^2\varphi}c(i-1,i',c) - \frac{e}{2\cos^2\varphi}c(i+1,i',c) \end{matrix}\right\}\sin(i,i'')$$
$$-\Sigma\left\{\begin{matrix} b(i,i',s) & -\frac{e}{2\cos^2\varphi}b(i-1,i',s) - \frac{e}{2\cos^2\varphi}b(i+1,i',s) \\ +\mathrm{tg}^2\varphi b(i,i',s) + \frac{e}{2\cos^2\varphi}c(i-1,i',s) - \frac{e}{2\cos^2\varphi}c(i+1,i',s) \end{matrix}\right\}\cos(i,i'')$$

Bezeichnet man nun diese Coefficienten von $W$ und $W_1$ mit $B(i,i',s)$. $B(i,i',c)$, $B_1(i,i',s)$ und $B_1(i,i',c)$, das heisst, setzt man hierauf

$$W = \Sigma B(i,i',s)\cos(i,i'') + \Sigma B(i,i',c)\sin(i,i'')$$
$$W_1 = \Sigma B_1(i,i',s)\sin(i,i'') - \Sigma B_1(i,i',c)\cos(i,i'')$$

wo man wieder statt der constanten Glieder selbst das Doppelte derselben ansetzen muss, dann ist durch den obigen Ausdruck für $P$ leicht zu erkennen, dass

$$\frac{D_1'}{\cos i} = -\Sigma E(i,i',s)\sin(i,i'') + \Sigma E(i,i',c)\cos(i,i'')$$
$$-\Sigma F(i,i',s)\sin\{-\eta+(i,i'')\} + \Sigma F(i,i',c)\cos\{-\eta+(i,i'')\}$$
$$-\Sigma G(i,i',s)\sin\{\ \eta+(i,i'')\} + \Sigma G(i,i',c)\cos\{\ \eta+(i,i'')\}$$
$$\frac{E_1'}{\cos i} = \quad \Sigma E_1(i,i',s)\cos(i,i'') + \Sigma E_1(i,i'c)\sin(i,i'')$$
$$+\Sigma F_1(i,i',s)\cos\{-\eta+(i,i'')\} + \Sigma F_1(i,i',c)\sin\{-\eta+(i,i'')\}$$
$$+\Sigma G_1(i,i',s)\cos\{\ \eta+(i,i'')\} + \Sigma G_1(i,i',c)\sin\{\ \eta+(i,i'')\}$$

Digitized by Google

wo allgemein
$$E(i,i') = \quad AB(i-1,i') - AB(i+1,i')$$
$$F(i,i') = \quad AB(i,i') \quad + \tfrac{1}{2}B(i-1,i')$$
$$G(i,i') = -AB(i,i') \quad - \tfrac{1}{2}B(i+1,i')$$

und $A = -\frac{1}{4}e$ ist. Die $E$ Coefficienten braucht man wieder nicht aus der vorstehenden Formel zu berechnen, da allgemein

$$E(i,i') = -F(i+1,i') - G(i-1,i')$$

ist. Diese Ausdrücke gelten sowohl für die Coefficienten der Sinusse wie für die Cosinusse beides in $D_1''$ und $E_1''$.

## 47.

Ich stelle jetzt die numerischen Werthe der im Vorstehenden erklärten Hülfsgrössen für unser Beispiel auf, welchen die Bemerkung voranzusenden ist, dass hier das Product $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)d\lambda$ gänzlich unmerklich ist und daher $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$ nicht berechnet zu werden brauchte.

| | $\frac{\left(\frac{dU}{de}\right)}{\cos i}$ | | $\frac{U\frac{ae\sin\varepsilon}{r}}{\cos i}$ | | $\frac{Y}{\cos i}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $i,i'$ | −sin | −cos | sin | cos | cos | −sin |
| 0,0,0 | | 0 | | +0".044 | −0".48 | |
| −1,1,0 | +0".446 | +3".328 | +0".446 | −0.007 | +0.24 | +8".29 |
| 0,1,0 | +0.031 | −0.485 | −0.045 | −0.027 | +0.40 | −0.47 |
| −1,2,0 | −2.788 | −14.836 | −0.008 | +0.107 | −2.96 | −14.84 |
| 1,0,0 | 0 | 0 | +0.023 | −0.080 | +2.86 | +15.31 |
| 2,0 | +0.250 | +1.286 | +0.002 | −0.010 | +0.29 | +1.34 |
| | +1.083 | +1.542 | −0.064 | −0.346 | +1.47 | +1.31 |
| | −0.486 | −1.457 | +0.061 | +0.325 | −1.46 | −2.65 |
| 3,0 | −0.11 | −0.14 | +0.01 | +0.03 | −0.42 | −0.13 |
| | +0.43 | +0.78 | +0.01 | +0.09 | +0.54 | +0.98 |
| | −0.14 | −0.30 | −0.02 | −0.04 | −0.39 | −0.85 |
| −2,−1 | +0.09 | +0.18 | −0.02 | −0.01 | −0.13 | −0.25 |
| | +0.18 | +0.08 | +0.03 | +0.05 | −0.83 | −0.13 |
| | −0.64 | −0.47 | −0.01 | −0.04 | +0.96 | +0.68 |
| −1,−1 | −0.38 | −0.22 | 0.00 | 0.00 | +1.12 | +0.65 |
| | −0.07 | −0.04 | −0.19 | −0.11 | −2.58 | −3.40 |
| | −0.95 | −1.99 | +0.20 | +0.11 | +1.46 | +2.75 |
| 0,−1 | −0.01 | 0.00 | +0.02 | +0.08 | −0.37 | −0.01 |
| | +4.54 | +2.62 | +0.87 | +0.46 | +12.71 | +7.24 |
| | +4.34 | +2.53 | −0.89 | −0.53 | −12.34 | −7.23 |
| 1,−1 | −0.01 | −0.17 | +0.01 | 0.00 | −0.02 | −0.45 |
| | −4.44 | −2.44 | 0.00 | +0.09 | −6.94 | −2.96 |
| | +0.13 | +0.05 | −0.01 | −0.08 | +6.96 | +3.41 |

Digitized by Google

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,−1 | +0".28 | +0".24 | +0".02 | −0".07 | +0".45 | +0".24 |
| | +12.69 | +1.66 | −0.90 | −0.54 | +12.00 | +1.40 |
| | −4.40 | −0.67 | +0.89 | +0.57 | −12.45 | −1.64 |
| 3,−1 | −1.11 | −0.13 | +0.01 | 0.00 | −1.08 | −0.10 |
| | −0.85 | +0.26 | +0.18 | +0.02 | −0.59 | +0.33 |
| | +1.19 | −0.04 | −0.18 | −0.03 | +1.67 | −0.23 |
| −1,−2 | −0.13 | +0.04 | +0.02 | −0.02 | +0.40 | −0.09 |
| | −0.06 | +0.03 | −0.08 | +0.03 | +0.38 | −0.69 |
| | +0.37 | −0.39 | +0.06 | −0.02 | −0.78 | +0.78 |
| 0,−2 | 0.00 | 0.00 | +0.01 | 0.00 | −1.04 | +0.95 |
| | +2.32 | −1.20 | +0.25 | −0.28 | +5.31 | −2.01 |
| | +1.49 | −0.44 | −0.26 | +0.30 | −4.27 | +1.06 |
| 1,−2 | −0.03 | −0.02 | −0.04 | +0.03 | +0.01 | −0.19 |
| | −11.66 | +10.58 | +0.03 | 0.00 | −12.00 | +10.66 |
| | +0.10 | −0.06 | +0.01 | −0.02 | +11.99 | −10.47 |
| 2,−2 | +0.80 | −0.54 | 0.00 | 0.00 | +0.68 | −0.22 |
| | +4.48 | −3.14 | −0.21 | +0.13 | +4.84 | −4.13 |
| | −2.03 | +1.46 | +0.20 | −0.13 | −5.52 | +4.35 |
| 3,−2 | −0.36 | +0.20 | +0.02 | 0.00 | −0.39 | +0.27 |
| | −3.84 | +8.16 | +0.05 | −0.03 | −3.60 | +7.74 |
| | +2.19 | −4.24 | −0.07 | +0.03 | +3.99 | −8.01 |
| 4,−2 | +0.33 | −0.73 | 0.00 | 0.00 | +0.31 | −0.71 |
| | −0.04 | −0.22 | −0.04 | +0.09 | −0.13 | −0.07 |
| | −0.24 | +0.70 | +0.05 | −0.09 | −0.18 | +0.78 |
| 0,−3 | +0.01 | +0.02 | +0.01 | +0.01 | −0.07 | +0.51 |
| | +0.31 | −0.17 | +0.01 | −0.09 | +0.81 | +0.10 |
| | +0.23 | +0.12 | −0.02 | +0.08 | −0.74 | −0.61 |
| 1,−3 | −0.17 | −0.35 | 0.00 | +0.01 | −0.49 | −1.08 |
| | −0.59 | +5.02 | +0.09 | +0.17 | −0.24 | +6.53 |
| | −0.07 | −0.19 | −0.08 | −0.18 | +0.73 | −5.45 |
| 2,−3 | +0.10 | −0.18 | −0.01 | −0.02 | +0.13 | −0.12 |
| | −5.40 | −12.59 | −0.02 | +0.06 | −5.15 | −12.18 |
| | +1.74 | +4.39 | +0.03 | −0.03 | +5.02 | +12.60 |
| 3,−3 | +0.24 | +0.85 | 0.00 | 0.00 | +0.10 | +0.72 |
| | +0.83 | +4.36 | −0.04 | −0.15 | +1.30 | +4.61 |
| | −0.63 | −2.86 | +0.03 | +0.14 | −1.40 | −5.33 |
| 4,−3 | −0.04 | −0.34 | 0.00 | +0.01 | −0.09 | −0.37 |
| | −4.21 | −3.88 | +0.01 | +0.04 | −3.96 | −3.63 |
| | +2.57 | +2.61 | −0.01 | −0.06 | +4.05 | +4.00 |
| 5,−3 | +0.39 | +0.34 | 0.00 | 0.00 | +0.36 | +0.32 |
| | −0.09 | −0.11 | −0.04 | −0.03 | −0.15 | −0.18 |
| | −0.26 | −0.21 | +0.04 | +0.04 | −0.21 | −0.14 |
| 1,−4 | −0.14 | −0.08 | −0.01 | 0.00 | −0.45 | −0.25 |
| | +0.20 | +0.91 | +0.07 | +0.04 | +0.03 | +1.28 |
| | −0.07 | −0.05 | −0.06 | −0.04 | +0.42 | −1.03 |
| 2,−4 | +0.12 | −0.09 | 0.00 | 0.00 | +0.84 | −0.14 |
| | −4.87 | −2.59 | −0.11 | +0.03 | −5.75 | −2.52 |
| | +1.51 | +0.92 | +0.11 | −0.02 | +4.91 | +2.66 |
| 3,−4 | +0.21 | +0.18 | +0.02 | 0.00 | +0.16 | +0.18 |
| | +10.00 | −0.66 | −0.04 | −0.03 | +9.77 | −0.53 |
| | −5.20 | +0.18 | +0.03 | +0.03 | −9.93 | +0.35 |

Digitized by Google

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4,−4 | −0.66 | −0.03 | 0.00 | 0.00 | −0.59 | −0.09 |
| | −3.15 | −0.67 | +0.09 | 0.00 | −3.27 | −0.43 |
| | +2.51 | +0.41 | −0.09 | 0.00 | +3.86 | +0.52 |
| 5,−4 | +0.26 | +0.06 | 0.00 | 0.00 | +0.28 | +0.03 |
| | +2.92 | −1.71 | −0.03 | −0.01 | +2.58 | −1.60 |
| | −2.17 | +1.09 | +0.03 | +0.01 | −2.86 | +1.57 |

Ferner ergab sich

| | $\frac{W}{\cos i}$ | | $\frac{W_1}{\cos i}$ | |
|---|---|---|---|---|
| $i,i'$ | cos | sin | sin | −cos |
| 0,0 | −88.279 | | | +0.062 |
| 1,0 | +3.232 | +2.774 | +0.396 | −0.079 |
| 2,0 | +11.067 | +4.067 | −2.028 | −0.759 |
| 3,0 | −0.754 | −1.283 | +0.053 | +0.152 |
| −2,−1 | +2.80 | +0.76 | +0.24 | −0.01 |
| −1,−1 | −8.16 | −10.98 | −0.48 | −0.61 |
| 0,−1 | −8.64 | −4.67 | +0.31 | +0.82 |
| 1,−1 | +14.85 | +47.02 | −1.26 | −3.65 |
| 2,−1 | +0.73 | +1.14 | +0.53 | −0.78 |
| 3,−1 | +0.31 | −8.16 | −0.09 | +1.86 |
| −1,−2 | −0.10 | −4.27 | −0.05 | −0.14 |
| 0,−2 | −9.36 | +11.93 | −0.49 | +0.50 |
| 1,−2 | −4.74 | +11.33 | +6.05 | −4.91 |
| 2,−2 | +47.91 | −33.26 | −29.84 | +21.07 |
| 3,−2 | +3.24 | −1.88 | −2.02 | +0.33 |
| 4,−2 | −5.05 | +1.32 | +1.29 | −0.35 |
| 0,−3 | −4.99 | +1.90 | −0.01 | +0.09 |
| 1,−3 | +10.41 | +5.02 | +1.28 | −0.49 |
| 2,−3 | +14.56 | −1.45 | −10.46 | −0.47 |
| 3,−3 | −24.35 | −19.50 | +17.00 | +13.17 |
| 4,−3 | −2.55 | −2.41 | +0.91 | +1.61 |
| 5,−3 | +1.67 | +2.60 | −0.49 | −0.69 |

und hieraus

| | $\frac{D'_1}{\cos i}$ | | $\frac{E'_1}{\cos i}$ | |
|---|---|---|---|---|
| $i,i'$ | −sin | cos | cos | sin |
| 0,0,0 | | +0.236 | +0.034 | |
| −1,1,0 | −44.277 | −0.118 | −0.017 | +0.034 |
| 0,1,0 | +4.217 | +0.173 | −0.086 | −0.035 |
| −1,2,0 | +1.146 | +1.214 | +0.284 | −0.008 |
| 1,0,0 | −5.363 | −1.387 | −0.198 | +0.043 |
| 2,0 | −0.169 | −0.172 | −0.015 | +0.068 |
| | +5.566 | +2.088 | −1.016 | −0.445 |
| | −5.397 | −1.916 | +1.031 | +0.377 |
| 3,0 | −0.47 | −0.17 | +0.08 | +0.03 |
| | −0.38 | −0.64 | +0.03 | +0.08 |
| | +0.85 | +0.81 | −0.11 | −0.11 |

Digitized by Google

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| −2, −1 | −0″35 | −0″47 | −0″02 | −0″03 |
| | +1.75 | +0.85 | +0.14 | +0.02 |
| | −1.40 | −0.38 | −0.12 | +0.01 |
| −1, −1 | −0.49 | −0.52 | 0.00 | +0.03 |
| | −3.71 | −5.29 | −0.25 | −0.34 |
| | +4.20 | +5.81 | +0.25 | +0.31 |
| 0, −1 | +0.98 | +2.47 | −0.03 | −0.13 |
| | −4.95 | −4.34 | +0.21 | +0.57 |
| | +3.97 | +1.87 | −0.18 | −0.44 |
| 1, −1 | +0.40 | +0.25 | +0.01 | −0.06 |
| | +7.40 | +23.46 | −0.65 | −1.80 |
| | −7.80 | −23.71 | +0.64 | +1.86 |
| 2, −1 | −0.62 | −2.35 | +0.05 | +0.24 |
| | +0.36 | +0.92 | +0.27 | −0.47 |
| | +0.26 | +1.43 | −0.32 | +0.23 |
| 3, −1 | −0.03 | −0.05 | −0.02 | +0.03 |
| | +0.16 | −4.08 | −0.05 | +0.93 |
| | −0.13 | +4.13 | +0.07 | −0.96 |
| −1, −2 | −0.40 | +0.51 | −0.02 | +0.02 |
| | +0.35 | −2.65 | −0.01 | −0.08 |
| | +0.05 | +2.14 | +0.03 | +0.06 |
| 0, −2 | −0.20 | +0.66 | +0.26 | −0.21 |
| | −4.48 | +5.49 | −0.51 | +0.46 |
| | +4.68 | −6.15 | +0.25 | −0.25 |
| 1, −2 | +2.43 | −1.92 | −1.25 | +0.88 |
| | −4.40 | +7.08 | +4.30 | −3.36 |
| | +1.97 | −5.16 | −3.05 | +2.48 |
| 2, −2 | +0.34 | −0.56 | −0.35 | +0.22 |
| | +23.82 | −16.55 | −14.83 | +10.53 |
| | −24.16 | −17.11 | +15.18 | −10.75 |
| 3, −2 | −2.25 | +1.47 | +1.32 | −0.91 |
| | +1.84 | −1.00 | −1.06 | +0.18 |
| | +0.41 | −0.47 | −0.26 | +0.73 |
| 4, −2 | −0.14 | +0.08 | +0.09 | −0.01 |
| | −2.53 | +0.66 | +0.64 | −0.18 |
| | +2.67 | −0.74 | −0.73 | +0.19 |
| 0, −3 | +0.45 | +0.21 | +0.05 | −0.02 |
| | −2.95 | +0.75 | −0.06 | +0.07 |
| | +2.50 | −0.96 | +0.01 | −0.05 |
| 1, −3 | +0.83 | −0.14 | −0.44 | −0.02 |
| | +4.59 | +2.57 | +1.08 | −0.23 |
| | −5.42 | −2.43 | −0.64 | +0.25 |
| 2, −3 | −1.49 | −1.04 | +0.67 | +0.58 |
| | +8.32 | +0.10 | −5.95 | −0.80 |
| | −6.83 | +0.94 | +5.28 | +0.22 |
| 3, −3 | −0.73 | −0.04 | +0.48 | +0.09 |
| | −12.07 | −9.65 | +8.46 | +6.52 |
| | +12.80 | +9.69 | −8.94 | −6.61 |
| 4, −3 | +1.11 | +0.94 | −0.74 | −0.59 |
| | −1.35 | −1.32 | +0.48 | +0.84 |
| | +0.24 | +0.38 | +0.26 | −0.25 |
| 5, −3 | +0.11 | +0.11 | −0.04 | −0.07 |
| | +0.84 | +1.30 | −0.25 | −0.35 |
| | −0.95 | −1.41 | +0.29 | +0.42 |

Digitized by Google

48.

Ausser den im Vorhergehenden angeführten Bedingungsgleichungen findet bei allen Hülfsgrössen für die Breitenstörungen noch die folgende statt. Seien in irgend einer derselben

$$P \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}(i,i')$$
$$+ Q \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\{-\eta+(i,i')\}$$
$$+ R \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\{\eta+(i,i')\}$$

irgend drei Glieder, in welchen die Indices $i$ und $i'$ dieselben Werthe haben, dann ist

$$P = -e(Q+R)$$

welche Gleichung davon herrührt, dass diese Functionen ursprünglich die Form

$$K(\cos\eta - e) + L\sin\eta$$

haben.

Im Vorstehenden habe ich alle zur Berechnung der vom Quadrat der störenden Kraft abhängigen Glieder erforderlichen Hülfsgrössen angegeben, obgleich mehrere derselben hätten weggelassen werden können, da sie auf das Resultat nur sehr geringen Einfluss äussern. Ich habe aber alle angeführt, um zu zeigen, wie man in einem extremen Falle zu verfahren hat. Auch hätte ich nicht nöthig gehabt sie in dieser Ausdehnung zu berechnen, sondern hätte fast allenthalben an dem untern Ende einer jeden Abtheilung in Bezug auf den Index $i'$ wenigstens Ein Glied weglassen können, es ist indessen jedenfalls angemessener, sofort eine zu grosse wie eine zu kleine Anzahl von Gliedern berechnet zu haben, da das nachherige Berechnen von Gliedern, im Falle, dass man zuerst eine zu geringe Anzahl davon berechnet haben sollte, nicht angenehm ist. Uebrigens hat die Berechnung dieser Hülfsgrössen in der denselben im Vorstehenden gegebenen Ausdehnung nur eine Arbeit von wenigen Tagen in Anspruch genommen, da die Formeln, nach welchen sie berechnet worden, so einfach und gleichförmig sind.

Digitized by Google

## §. 5. Berechnung der für die vom Quadrat der störenden Masse abhängigen Glieder erforderlichen Producte.

### 49.

In der grössten Anzahl der zu berechnenden Producte besteht der eine Factor aus einer von $\eta$ abhängigen Function, während der andere kein $\eta$ enthält. Ausserdem sind einige Producte erforderlich, in welchen jeder der beiden Factoren von $\eta$ unabhängig ist; Producte, in welchen beide Factoren von $\eta$ abhängig wären, kommen gar nicht vor. Betrachten wir die erstgenannte Gattung von Producten etwas näher. Wegen der Abhängigkeit des einen Factors derselben von $\eta$ besteht dieser, wie man im Vorhergehenden gesehen hat, aus drei verschiedenen Gattungen von Gliedern, nemlich aus solchen, die kein $\eta$ enthalten, aus solchen, in welchen unter dem Sinus- und Cosinuszeichen $-\eta$, und aus solchen, wo $+\eta$ vorkommt. Bei der Berechnung dieser Producte könnte man jede dieser Gattungen von Gliedern besonders behandeln, oder mit andern Worten jedes Product in drei Theile zerlegen, und würde dieses auf folgende Weise ausführen können. Seien z B. im Factor $A$ von $\frac{an^2z}{r}$

$$\begin{aligned} &\alpha_s \sin(i,i') && + \alpha_c \cos(i,i') \\ &+\beta_s \sin\{-\eta+(i,i')\} && + \beta_c \cos\{-\eta+(i,i')\} \\ &+\gamma_s \sin\{\ \eta+(i,i')\} && + \gamma_c \cos\{\ \eta+(i,i')\} \end{aligned}$$

irgend drei Glieder, in welchen die Indices $i$ und $i'$ dieselben Werthe haben. dann zerlegt man diese Function in die drei Elemente, welche sie zufolge des §. 4 enthält, indem man erstens die Glieder heraushebt, die von $\eta$ unabhängig sind, zweitens in den übrigen Gliedern $\eta = 0$, und drittens in denselben $\eta = 90^0$ macht. Setzt man daher

$$\begin{aligned} \Xi_1 = &\quad \Sigma\alpha_s \sin(i,i') && + \Sigma\alpha_c \cos(i,i') \\ \Upsilon = &\quad \Sigma'(\beta_s+\gamma_s) \sin(i,i') && + \Sigma'(\beta_c+\gamma_c) \cos(i,i') \\ \Psi = &-\Sigma'(\beta_s-\gamma_s) \cos(i,i') && + \Sigma'(\beta_c-\gamma_c) \sin(i,i') \end{aligned}$$

so kann man statt des Products $A\frac{an^2z}{r}$ die drei Producte

$$\Xi_1 \frac{an^2z}{r}; \quad \Upsilon \frac{an^2z}{r}; \quad \Psi \frac{an^2z}{r}$$

rechnen, die von $\eta$ unabhängig sind. Durch die Analyse des §. 4 überzeugt man sich leicht, dass in der That die hier $\Xi_1$, $\Upsilon$ und $\Psi$ genannten Functionen bez. die Coefficienten von $\frac{an^2z}{r}$ in den Differentialen der Variationen der dort $\Xi + \frac{1}{4}e\Upsilon$, $\Upsilon$ und $\Psi$ genannten Elemente sind.

Digitized by Google

Sei durch Berechnung dieser drei Producte erhalten worden

$$\Xi_1 \frac{an\partial z}{r} = \Sigma f_s \sin(i,i') + \Sigma f_c \cos(i,i')$$
$$\Upsilon \frac{an\partial z}{r} = \Sigma g_s \sin(i,i') + \Sigma g_c \cos(i,i')$$
$$\Psi \frac{an\partial z}{r} = \Sigma h_s \cos(i,i') + \Sigma h_c \sin(i,i')$$

so wird

$$A \frac{an\partial z}{r} = \Sigma f_s \sin(i,i') + \Sigma f_c \cos(i,i')$$
$$+\tfrac{1}{2}\Sigma(g_s - h_s)\sin\{-\eta+(i,i')\} + \tfrac{1}{2}\Sigma(g_c+h_c)\cos\{-\eta+(i,i')\}$$
$$+\tfrac{1}{2}\Sigma'(g_s+h_s)\sin\{\ \eta+(i,i')\} + \tfrac{1}{2}\Sigma'(g_c-h_c)\cos\{\ \eta+(i,i')\}$$

und auf diese Weise kann man mit jedem der übrigen ähnlichen Producte verfahren.

50.

Das eben beschriebene Verfahren wende ich indess nicht an, sondern ziehe vor, die Producte ungetheilt zu berechnen. Ich ordne daher die betreffenden Factoren nicht nach den Werthen des Index $i$, sondern so wie im vor. § in den numerischen Angaben derselben geschehen ist, nemlich so, dass die Glieder

$$(i,i') \text{ oder } (i-i'\mu)\varepsilon - i'(c'-c\mu)$$
$$-\eta+(i+1,i') \ldots -\eta+(i+1-i'\mu)\varepsilon - i'(c'-c\mu)$$
$$\eta+(i-1,i') \ldots +\eta+(i-1-i'\mu)\varepsilon - i'(c'-c\mu)$$

die sich nachher nach der Verwandelung von $\eta$ in $\varepsilon$ zu Einem Gliede vereinigen, unmittelbar auf einander folgen. Die Berechnung des Products geht auf diese Art schneller und sicherer von statten und lässt sich leicht controliren. In einigen Producten, und zwar in

$$C\delta\tfrac{h}{h_0};\ B''\nu;\ C''\delta\tfrac{h}{h_0};\ D''_{1\frac{u}{\cos i}};\ E''_{1\frac{u_1}{\cos i}}$$

ist die Summe der Coefficienten von je drei der vorbenannten Glieder gleich Null, und da diese Eigenschaft auf das Product übergeht, so giebt sie unmittelbar ein Mittel zur Aufsuchung und Berichtigung der etwa bei der Berechnung des Products begangenen Rechnungsfehler. Die übrigen Producte besitzen diese Eigenschaft nicht, aber dadurch, dass ich die Summe von je dreien der oben genannten Glieder nehme, und diese nachher auch mit dem betreffenden zweiten Factor multiplicire, erlange ich für die richtige Berechnung dieser Producte auch eine sichere Controle.



Digitized by Google

51.

Die Zeichen der Coefficienten der Hülfsgrössen sind im vor. § so gelassen worden, wie die Formeln ohne Unterschied zwischen den Cosinussen und Sinussen zu machen sie unmittelbar geben. Bei der Anwendung derselben zur Bildung der Producte müssen von einigen derselben, um wieder eine Gleichförmigkeit in der Zusammensetzung der Coefficienten der verschiedenen Producte zu erhalten, die Zeichen geändert werden. Hieraus kann keine Quelle des Irrthums entstehen, da man diese Zeichenwechsel bei allen bez. Coefficienten auf ein Mal vornehmen kann.

Ich werde nun in jedem Factor nur Ein Argument betrachten, da die Formeln für dieses sich auf alle ausdehnen lassen. Unter dem Kreisbogen, welcher dieses Argument bildet, soll

$$l\eta + (i - i'\mu)\varepsilon - i'(c' - c\mu)$$

verstanden werden, so dass, wenn man $l$ nur die drei folgenden Werthe beilegt,

$$l = 0,\ l = -1,\ l = +1$$

dieses Argument alle drei Gattungen von Gliedern in sich begreift. Der Kürze wegen werde ich dieses Argument wieder nicht ganz ausschreiben, sondern wie vorher, aber mit Hinzufügung von $l$, nur die Indices davon angeben, und also unter den Bezeichnungen $\cos(l, i, i')$ und $\sin(l, i, i')$ wieder den Cosinus und Sinus des obigen Arguments verstehen. Sei nun

$$\begin{aligned}
A &= \ \ A_c\cos(l,i,i') - A_s\sin(l,i,i')\\
B &= -B_s\sin(l,i,i') + B_c\cos(l,i,i')\\
C &= -C_s\sin(l,i,i') + C_c\cos(l,i,i')\\
D &= \ \ D_c\cos(l,i,i') - D_s\sin(l,i,i')\\
E &= -E_s\sin(l,i,i') + E_c\cos(l,i,i')
\end{aligned}$$

woraus ersichtlich ist, dass nur dem $A_c$ und $E_s$ in Bezug auf die Zeichen, die sie im vor. § haben, die entgegengesetzten Zeichen gegeben worden sind. Uebrigens sollen die vorstehenden Coefficienten in Secunden, und von den constanten Gliedern das Doppelte, welches in allen Tafeln des vor. § schon angesetzt ist, verstanden werden. Von den zweiten Factoren setze ich das folgende Argument an:

Digitized by Google

$$\frac{an\delta z}{r} = 2a_s \sin(k,k') + 2a_c \cos(k,k')$$
$$\nu = 2b_c \cos(k,k') + 2b_s \sin(k,k')$$
$$\delta\frac{h}{h_0} = 2c_c \cos(k,k') + 2c_s \sin(k,k')$$
$$\frac{u}{\cos i} = 2d_s \sin(k,k') + 2d_c \cos(k,k')$$
$$\frac{u_1}{\cos i} = 2e_c \cos(k,k') + 2e_s \sin(k,k')$$

wo die Coefficienten in Theilen des Radius ausgedrückt sein sollen, damit man die des Products in Secunden bekomme. Nachdem man also von den in Secunden ausgedrückten Coefficienten dieser Grössen das constante Glied verdoppelt hat, muss man alle Coefficienten ohne Ausnahme mit $2(206265'')$ dividiren, um die vorstehenden mit $a_s$, $a_c$, $b_s$ etc. bezeichneten Coefficienten zu erhalten. Aus den im Vorstehenden betrachteten Gliedern bekommt man nun

$$A\frac{an\delta z}{r} = -(A_s a_c \mp A_c a_s)\sin(l, i\pm k, i'\pm k') + (A_c a_c \pm A_s a_s)\cos(l, i\pm k, i'\pm k')$$
$$B\nu = -(B_s b_c \mp B_c b_s)\sin(l, i\pm k, i'\pm k') - (B_c b_c \pm B_s b_s)\cos(l, i\pm k, i'\pm k')$$
$$C\delta\frac{h}{h_0} = -(C_s c_c \mp C_c c_s)\sin(l, i\pm k, i'\pm k') + (C_c c_c \pm C_s c_s)\cos(l, i\pm k, i'\pm k')$$
$$D\frac{u}{\cos i} = -(D_s d_c \mp D_c d_s)\sin(l, i\pm k, i'\pm k') + (D_c d_c \pm D_s d_s)\cos(l, i\pm k, i'\pm k')$$
$$E\frac{u_1}{\cos i} = -(E_s e_c \mp E_c e_s)\sin(l, i\pm k, i'\pm k') + (E_c e_c \pm E_s e_s)\cos(l, i\pm k, i'\pm k')$$

Sei ferner

$$\left(\frac{dW_0}{d\eta}\right) = F_s \sin(i,i') + F_c \cos(i,i')$$

wo zufolge des §. 4 (II)

$$F_s = \left\{\frac{G(i+1,i',c)}{i+1-i'\mu} - \frac{H(i-1,i',c)}{i-1-i'\mu}\right\}$$
$$F_c = -\left\{\frac{G(i+1,i',s)}{i+1-i'\mu} - \frac{H(i-1,i',s)}{i-1-i'\mu}\right\}$$

ist, und betrachten wir in $\nu$ auch das folgende Glied

$$\nu = V_c \cos(i,i') + V_s \sin(i,i')$$

Diese geben

$$\left(\frac{dW_0}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r} = (F_s a_c \mp F_c a_s)\cos(i\pm k, i'\pm k') + (F_c a_c \pm F_s a_s)\sin(i\pm k, i'\pm k')$$
$$\nu^2 = (V_s b_c \mp V_c b_s)\cos(i\pm k, i'\pm k') + (V_c b_c \pm V_s b_s)\sin(i\pm k, i'\pm k')$$

Sei ferner

$$\left(\frac{d^2W_0}{d\eta^2}\right) = -G_c \cos(i,i') + G_s \sin(i,i')$$

wo in Bezeichnungen des §. 4 (II)



Digitized by Google

$$G_c = \left\{\frac{G(i+1,i',c)}{i+1-i'\mu} + \frac{H(i-1,i',c)}{i-1-i'\mu}\right\}$$
$$G_s = -\left\{\frac{G(i+1,i',s)}{i+1-i'\mu} + \frac{H(i-1,i',s)}{i-1-i'\mu}\right\}$$

ist, dann wird

$$\left(\frac{d^2W_0}{d\eta^2}\right)\frac{an\delta z}{r} = (G_s a_c \mp G_c a_s)\sin(i\pm k, i'\pm k') - (G_c a_c \pm G_s a_s)\cos(i\pm k, i'\pm k')$$

Dieses sind mit Ausnahme des Products

$$\left(\frac{dW_0}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r} \cdot \frac{ae\sin\varepsilon}{r}$$

welches durch den Ausdruck (20) erhalten wird, nachdem man darin die Coefficienten von $\left(\frac{dW_0}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r}$ statt der $F$ Coefficienten substituirt hat, alle für die Störungen der Länge und des Radius erforderlichen Producte. Alle sind, wie man sieht, auf gleiche Art zusammengesetzt, und die Vorzeichen der Glieder sind so, wie für die Integrationen am einfachsten ist. Wenn man die Logarithmen von $A_c$ und $A_s$ in dieser Folge neben einander auf den oberen Rand eines Blattes Papiers, und die von $a_s$ und $a_c$ in dieser Folge auf den unteren Rand eines anderen Blattes Papiers geschrieben hat, so bekommt man die Logarithmen der partiellen Producte in folgender Anordnung

$$\log A_c a_s,\ \log A_s a_s$$
$$\log A_c a_c,\ \log A_s a_c$$

nennt man die dazu gehörigen Zahlen beziehungsweise

$$(3),\ (4)$$
$$(2),\ (1)$$

dann wird

$$A\frac{an\delta z}{r} = -\{(1)-(3)\}\sin(l,i+k,i'+k') + \{(2)+(4)\}\cos(l,i+k,i'+k')$$
$$-\{(1)+(3)\}\sin(l,i-k,i'-k') + \{(2)-(4)\}\cos(l,i-k,i'-k')$$

Schreibt man wieder die Logarithmen von $B_s$, $B_c$ und $b_c$, $b_s$ in dieser Folge hin, so erhält man die partiellen Producte in folgender Anordnung:

$$\log B_s b_c,\ \log B_c b_c$$
$$\log B_s b_s,\ \log B_c b_s$$

und nennt man die Zahlen dann beziehungsweise

$$(1),\ (2)$$
$$(4),\ (3)$$

dann wird wieder

$$(22)\quad By = -\{(1)-(3)\}\sin(l,i+k,i'+k') + \{(2)+(4)\}\cos(l,i+k,i'+k')$$
$$-\{(1)+(3)\}\sin(l,i-k,i'-k') + \{(2)-(4)\}\cos(l,i-k,i'-k')$$

Digitized by Google

Geht man die vorstehenden Producte durch, so zeigt sich, dass man, um die in der vorstehenden Gleichung für die Bildung der Coefficienten des Products enthaltene Regel in allen Producten anwenden zu können, in den Producten

$$A\frac{an\delta z}{r};\ D\frac{u}{\cos i};\ \left(\frac{dW_0}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r};\ \left(\frac{d^2W_0}{d\eta^2}\right)\frac{an\delta z}{r}$$

die Bezeichnung

$$(3),(4)$$
$$(2),(1)$$

der partiellen Producte, und in den Producten

$$B\nu;\ C\delta\frac{h}{h_0};\ E\frac{u}{\cos i};\ \nu^2$$

die Bezeichnung

$$(1),(2)$$
$$(4),(3)$$

anwenden muss. Die obigen Formeln gelten für alle Glieder, nur muss man, wenn man den einfachen Werth des constanten Gliedes des Products haben will, von dem partiellen Product der constanten Glieder der beiden Factoren die Hälfte nehmen.

Wenn $k'>i'$ ist, so bekommt man durch diese Formeln Glieder, in welchen der mit $\mu\varepsilon$ multiplicirte Index das Pluszeichen hat, während wir bisher diesem nur das Minuszeichen zugetheilt haben. Es zieht aber gar keine Vermehrung der Arbeit mit sich, wenn man diese Glieder im Product für sich ansetzt, denn nachdem man alle Glieder des Products berechnet, und die Glieder, aus welchen jeder Coefficient desselben zusammengesetzt ist, addirt hat, kann man die genannten Glieder durch Umkehrung der Zeichen aller Indices und des Coefficienten des Sinus mit den analogen vereinigen, in welchen $\mu\varepsilon$ mit einer negativen Zahl multiplicirt ist.

Die Berechnung des Quadrats $\nu^2$ ist einer wesentlichen Abkürzung fähig, denn da sich alle partiellen Producte, mit Ausnahme derjenigen, die aus den Gliedern entstehen, in welchen $i=k$ und zugleich $i'=k'$ ist, wiederholen, so braucht man nur die Hälfte derselben zu berechnen und zu verdoppeln.

Die vorstehenden Formeln haben auch für die Berechnung der zur mehrerwähnten Bedingungsgleichung gehörigen Producte Geltung. Man braucht nur die Coefficienten von $A'$, $B'$, $D'$, $E'$ bez. statt der von $A$, $B$, $D$, $E$ darin zu substituiren. Auch das Product $2\nu.\delta\frac{h}{h_0}$, welches wir zu

Digitized by Google

dem Zwecke weiter unten brauchen werden, wird der Formel für $\nu^2$ analog berechnet, indem man in dem einen Ausdruck für $r$ die Coefficienten von $\delta\frac{h}{h_0}$ und in dem andern die von $2\nu$ substituirt. Es versteht sich von selbst, dass hienach die eben erwähnte Abkürzung nicht stattfindet, da $\nu . \delta\frac{h}{h_0}$ kein Quadrat ist.

## 52.

Für die Berechnung der zu den Breitenstörungen erforderlichen Producte setze ich

$$\begin{aligned}
A'' &= -A'_s \sin(l,i,i'') + A'_c \cos(l,i,i'') \\
B'' &= \;\; B'_c \cos(l,i,i'') - B'_s \sin(l,i,i'') \\
C'' &= \;\; C'_c \cos(l,i,i'') - C'_s \sin(l,i,i'') \\
D'' &= -D'_s \sin(l,i,i'') + D'_c \cos(l,i,i'') \\
E'' &= \;\; E'_c \cos(l,i,i'') - E'_s \sin(l,i,i'')
\end{aligned}$$

woraus ersichtlich ist, dass hier die den Coefficienten $A'_c$ und $E'_s$ im vor. § gegebenen Zeichen umgeändert werden müssen. Nimmt man nun die Coefficienten $a_s$, $a_c$, $b_c$ etc. in der ihnen im vor. Art. gegebenen Bedeutung wieder auf, so wird

$$A''\tfrac{an\partial z}{r} = (A'_c a_c \pm A'_s a_s)\cos(l, i\pm k, i''\pm k') - (A'_s a_c \mp A'_c a_s)\sin(l, i\pm k, i''\pm k')$$

$$B''\nu \;\; = (B'_c b_c \pm B'_s b_s)\cos(l, i\pm k, i''\pm k') - (B'_s b_c \mp B'_c b_s)\sin(l, i\pm k, i''\pm k')$$

$$C''\partial\tfrac{h}{h_0} = (C'_c c_c \pm C'_s c_s)\cos(l, i\pm k, i''\pm k') - (C'_s c_c \mp C'_c c_s)\sin(l, i\pm k, i''\pm k')$$

$$D''\tfrac{u}{\cos i} = (D'_c d_c \pm D'_s d_s)\cos(l, i\pm k, i''\pm k') - (D'_s d_c \mp D_c d_s)\sin(l, i\pm k, i''\pm k')$$

$$E''\tfrac{u_1}{\cos i} = (E'_c e_c \pm E'_s e_s)\cos(l, i\pm k, i''\pm k') - (E'_s e_c \mp E'_c e_s)\sin(l, i\pm k, i''\pm k')$$

Setzen wir ferner

$$\left(\tfrac{dR_0}{d\eta}\right) = R_c \cos(i,i'') + R_s \sin(i,i'')$$

wo in der Bezeichnung des §. 4 (II)

$$R_c = -\left\{\tfrac{U(i+1,i',c)}{i+1-i'\mu} - \tfrac{V(i-1,i',c)}{i-1-i'\mu}\right\}$$

$$R_s = \;\;\left\{\tfrac{U(i+1,i',s)}{i+1-i'\mu} - \tfrac{V(i-1,i',s)}{i-1-i'\mu}\right\}$$

ist, und $R_c$ mit $2(206265'')\,e_c$, so wie $R_s$ mit $2(206265'')e_s$ identisch ist, dann wird

$$\left(\tfrac{dR_0}{d\eta}\right)\tfrac{an\partial z}{r} = (R_s a_c \pm R_c a_s)\sin(i\pm k, i''\pm k') + (R_c a_c \mp R_s a_s)\cos(i\pm k, i''\pm k')$$

Digitized by Google

womit alle für die von dem Quadrat der störenden Kraft abhängigen, und in dem Haupttheil der Breitenstörungen vorkommenden, Producte aufgestellt sind. Zieht man hieraus das folgende allgemeine Schema für die Coefficienten irgend eines dieser Producte

$$\left.\begin{array}{l}\{(1)+(3)\}\cos(l,i+k,i''+k'')-\{(2)-(4)\}\sin(l,i+k,i''+k'')\\+\{(1)-(3)\}\cos(l,i-k,i''-k'')-\{(2)+(4)\}\sin(l,i-k,i''-k'')\end{array}\right\}\quad(23)$$

so muss man für die partiellen Producte von

$$A''\frac{\alpha n\delta z}{r}\;;\;D''\frac{u}{\cos i}\;;\;\left(\frac{dR_0}{d\eta}\right)\frac{\alpha n\delta z}{r}$$

die Bezeichnung

$$\begin{matrix}(3),(4)\\(2),(1)\end{matrix}$$

und für die partiellen Producte von

$$B''v\;;\;C''\delta\frac{h}{h_0}\;;\;E''\frac{u}{\cos i}$$

die Bezeichnung

$$\begin{matrix}(1),(2)\\(4),(3)\end{matrix}$$

anwenden. Uebrigens gelten die Bemerkungen des vor. Art. auch für diese Producte.

## 53.

Das Verfahren, welches ich anwende, um nach den im vor. und vorvor. Art. entwickelten Schemas die Producte vollständig zu berechnen, ist mit sehr weniger Abänderung dasselbe, welches ich schon in meiner Abhandlung über die Störungen des Jupiters und Saturns angewandt habe.

Ich lasse das Papier, welches zur Rechnung dienen soll, und wozu ich halbe Bogen (Folioblätter) nehme, so mit horizontalen und senkrechten Linien überziehen, dass dadurch Rechtecke gebildet werden, deren jedes zwei Logarithmen, den einen unter den andern, aufnehmen kann. Auf meinen Folioblättern befinden sich 26 Columnen, von welchen die beiden äussersten, die etwas schmäler sind, wie die übrigen, zur Aufnahme der Indices des zweiten Factors dienen; die Anzahl der horizontalen Linien ist 40. Oben am Rande des Blattes schreibe ich über je zwei Columnen die Indices der Argumente des Factors $A$ oder $B$ etc., wobei ich dieselbe Reihenfolge anwende, wie in den Tafeln des vor. § z. B. über 6 aufeinander folgende Columnen

Digitized by Google

$$\begin{array}{cccccc} 0,1,-2 & & -1,2,-2 & & 1,0,-2 & \\ | & | & | & | & | & | \end{array}$$

oder auch nur über die beiden ersten dieser Columnen die Indices der beiden ersten Coefficienten z. B. 1,—2, da die Indices der 4 folgenden Coefficienten daraus von selbst hervorgehen. Unter die Indices kommen die Logarithmen der Coefficienten $A_c$, $A_s$ etc. zu stehen, wogegen die Coefficienten $a_s$, $a_c$ etc. auf den untern Rand eines andern Blattes Papiers geschrieben werden. Durch das Anlegen dieses Blattes an jenes addire ich die Logarithmen der Coefficienten der beiden Factoren, wodurch ich die Logarithmen der in dem vor. Art. bezeichneten partiellen Producte bekomme; zugleich schreibe ich die Indices der Coefficienten des zweiten Factors in die äusserste Columne links oder rechts oder beides. Bei dieser Addition der Logarithmen kann sogleich aus den ersten Stellen derselben erkannt werden, ob das bez. partielle Product die numerische Grenze, die man im Voraus festgesetzt haben muss, übersteigt oder nicht, in welchem letzteren Falle das bez. Rechteck leer bleibt, oder höchstens darin durch ein einfaches Zeichen angedeutet wird, dass das Product nicht übersehen worden ist. Wenn man auf diese Art die Logarithmen aller Glieder, die die festgesetzte numerische Grenze übersteigen, erhalten hat, so werden die dazu gehörigen Zahlen auf ein anderes Papier nach Vorschrift der Formeln (22) oder (23) sogleich in die Columnen eingetragen, die der Summe oder der Differenz der Argumente der beiden Factoren zugehören, wobei wieder dieselbe Reihenfolge der Argumente anzuwenden ist. Die Glieder, aus welchen auf diese Art jeder Coefficient des Products zusammengesetzt ist, werden schliesslich addirt.

Es ist dienlich beim Aufschlagen der Zahlen der partiellen Producte abtheilungsweise nach den Coefficienten von $\mu\varepsilon$ im Product fort zu schreiten, nemlich erst die zu $0\mu\varepsilon$, dann die zu $-\mu\varepsilon$, dann die zu $+\mu\varepsilon$, etc. gehörigen Zahlen vorzunehmen. Wenn man sich stets an die Formeln (22) oder (23) hält, und also nie $i$ und $i'$ von $k$ und $k'$ abzieht, so wird man die Coefficienten der verschiedenen Abtheilungen des Products durch folgende Combinationen erhalten. Die Coefficienten der Glieder, in welchen

$0\mu\varepsilon$ vorkommt, durch
$i'=0,\ k'=0$ u. d. Add. u. Subtr.
$i'=1,\ k'=1$
$i'=2,\ k'=2$ } und durch Subtraction.
etc.

Digitized by Google

Hiebei wird sich dann ereignen, dass man auch Argumente bekommt, in welchen $\varepsilon$ mit einer negativen Zahl multiplicirt ist, und diese werden nach der Beendigung der Rechnung denen, in welchen die Coefficienten von $\eta$ und $\varepsilon$ das entgegengesetzte Zeichen haben, einverleibt. Ferner erhält man die Coefficienten der Glieder

$-\mu\varepsilon$ durch

$i'=0,\ k'=1$, u. d. Add.
$i'=1,\ k'=0$ u. d. Add. u. Subtr.
$i'=2,\ k'=1$
$i'=3,\ k'=2$ } u. d. Subtr.
etc.

$+\mu\varepsilon$ durch

$i'=0,\ k'=1$
$i'=1,\ k'=2$
$i'=2,\ k'=3$ } u. d. Subtr.
etc.

$-2\mu\varepsilon$ durch

$i'=0,\ k'=2$
$i'=1,\ k'=1$ } u. d. Add.
$i'=2,\ k'=0$ u. d. Add. u. Subtr.
$i'=3,\ k'=1$
$i'=4,\ k'=2$ } u. d. Subtr.
etc.

$+2\mu\varepsilon$ durch

$i'=0,\ k'=2$
$i'=1,\ k'=3$
$i'=2,\ k'=4$ } u. d. Subtr.
etc.

$-3\mu\varepsilon$ durch

$i'=0,\ k'=3$
$i'=1,\ k'=2$ } u. d. Add.
$i'=2,\ k'=1$
$i'=3,\ k'=0$ u. d. Add. u. Subtr.
$i'=4,\ k'=1$
$i'=5,\ k'=2$ } u. d. Subtr.
etc.

$+3\mu\varepsilon$ durch

$i'=0,\ k'=3$
$i'=1,\ k'=4$
$i'=2,\ k'=5$ } u. d. Subtr.
etc.

u. s. w. Es ist noch hiebei zu bemerken, dass zufolge der Formeln (22) und (23) von den vier partiellen Producten, die jedes Paar der Argumente der Factoren giebt, immer Drei dasselbe und Eins das entgegengesetzte Zeichen erhalten, dass nemlich immer entweder Drei das +, und Eins das —Zeichen, oder Drei das —, und Eins das +Zeichen bekommen; die Zeichen der vier Producte selbst mögen beschaffen sein wie sie wollen. Ferner ist immer für je vier zusammengehörige partielle Producte, abgesehen von den Zeichen,

$$\frac{(1)}{(4)} = \frac{(2)}{(3)} \text{ oder } \frac{(1)}{(2)} = \frac{(4)}{(3)}$$

Diese beiden Eigenschaften können dienen um Zeichenirrungen zu vermeiden und um Fehler in den Producten zu erkennen.

Digitized by Google

Ich habe bisher immer als allgemeine Grenze der aufzunehmenden Glieder 0".001 angenommen, und vermittelst dieser Grenze ist es leicht anzugeben, welche Glieder in jedem der beiden Factoren überhaupt angewandt werden müssen. Es sind aber jedesmal Glieder vorhanden, deren Coefficienten im Product mit einer grösseren Anzahl von Decimalstellen angegeben werden müssen; diese sind diejenigen, aus welchen die Säcularänderungen hervorgehen, und diejenigen, welche bei den Integrationen kleine Divisoren bekommen. Die Säcularänderungen entstehen aus den Gliedern der Producte, die mit den Argumenten

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big\{-\eta+\varepsilon\Big\} \text{ und } \begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big\}\eta$$

multiplicirt sind, sowie aus den Gliedern der Factoren $\frac{andz}{r}$, $\nu$, etc., die in der ersten Annäherung schon mit $\varepsilon$ multiplicirt sind, und wenn $i_1$ und $i'_1$ die Werthe von $i$ und $i'$ in den Producten sind, die einem kleinen Divisor angehören, so erhalten bei den Integrationen die mit

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big\{-\eta+(i_1-i'_1\mu)\varepsilon-U\Big\}$$

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big\{\qquad(i_1-i'_1\mu)\varepsilon-U\Big\}$$

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big\{-\eta+(i_1+1-i'_1\mu)\varepsilon-U\Big\}$$

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big\{\ \eta+(i_1-1-i'_1\mu)\varepsilon-U\Big\}$$

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big\{\ \eta+(i_1-i'_1\mu)\varepsilon-U\Big\}$$

multiplicirten Glieder vorzugsweise diesen Divisor, und zwar bekommt das zweite dieser Glieder das Quadrat, und die übrigen die erste Potenz desselben. Strenge genommen bekommen auch die mit

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big\{\qquad(i_1-1-i'_1\mu)\varepsilon-U\Big\}$$

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big\{\ \eta+(i_1-2-i'_1\mu)\varepsilon-U\Big\}$$

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big\{\qquad(i_1+1-i'_1\mu)\varepsilon-U\Big\}$$

$$\begin{matrix}\sin\\ \cos\end{matrix}\Big\{-\eta+(i_1+2-i'_1\mu)\varepsilon-U\Big\}$$

multiplicirten Glieder die erste Potenz dieses Divisors, aber diese Glieder werden zugleich mit $\frac{1}{2}e$ multiplicirt, und dieser Umstand lähmt, wenigstens in den meisten Fällen, die Wirkung des kleinen Divisors.

Die Glieder, aus welchen die Säcularänderungen entstehen, habe ich immer bis auf 0".00001 berechnet; bei denen, welche kleine Divisoren bekommen, muss sich die anzusetzende Zahl von Decimalen nach dem Divisor richten. In unserm Beispiel, wo die kleinsten Divisoren bei den

Digitized by Google

Argumenten 1,—3 und 2,—6 vorkommen, habe ich für den ersten die Coefficienten bis auf 0.00001, und für den andern bis auf 0.0001 anzusetzen für ausreichend gehalten.

In den Producten $\left(\frac{dW_0}{d\eta}\right)\frac{and z}{r}$, $\nu^2$, etc. kommen auch ein paar Glieder vor, die mit $\varepsilon^2$ multiplicirt sind; diese habe ich mit zwei Decimalen mehr wie die anderen Säcularänderungen berechnet.

Um erkennen zu können, wie weit die im §. 7 (II) entwickelten Bedingungsgleichungen in der That durch die Rechnung erfüllt worden sind, habe ich in jedem Product auch das constante Glied bis auf 0.00001 berechnet.

Es ist dienlich die Glieder, die mit mehr Decimalen wie allgemein anzusetzen sind, für sich zu behandeln, das heisst die Blätter, auf welchen die Logarithmen der partiellen Producte stehen, durchzugehen und nachzusehen, ob keins der hieher gehörigen partiellen Producte ausgelassen ist, und die zu diesen partiellen Producten gehörigen Zahlen abgesondert von denen, die zu den übrigen Argumenten gehören, aufzuschlagen und niederzuschreiben.

Die Producte $A\frac{and z}{r}$ und $B\nu$ sind die grössten von Allen. In unserm Beispiel waren für die Logarithmen der partiellen Producte derselben 5 Folioblätter erforderlich, auf deren einen Seiten die Logarithmen des einen, und auf deren anderen Seiten die Logarithmen des anderen Products berechnet wurden. Es versteht sich aber hiebei von selbst, dass ein grosser Theil des Papiers wegen der Unmerklichkeit der bezüglichen partiellen Producte leer bleibt, und man kann dieses schon daraus beurtheilen, dass für die Zahlen dieser beiden Producte nur drei Folioblätter erforderlich waren.

## 54.

Ich führe jetzt die Producte für die Längenstörungen unsers Beispiels an, und setze zuerst die Glieder, die den Factor $\varepsilon$ nicht enthalten, und darauf, die denselben enthalten, an, und die aus den in den Ausdrücken von $\frac{and z}{r}$, $\nu$, etc. enthaltenen mit $\varepsilon$ multiplicirten Gliedern entstanden sind.

Da in unserm Beispiel $\delta\lambda$ sehr klein ist, so fügt das erste Product nur den Gliedern, die den kleinsten Divisor enthalten, ein Weniges hinzu, nemlich

Digitized by Google

| $\left(\frac{dT}{d\lambda}\right)\delta\lambda$ | | |
|---|---|---|
| $i, i'$ | $-\sin$ | $\cos$ |
| 1, −3 | −0.00014 | —— |
| | +0.00004 | —— |
| | +0.00015 | —— |
| 2, −3 | —— | —— |
| | —— | —— |
| | −0.00024 | −0.00020 |

Die übrigen Producte bekam ich wie folgt.

| | $A\frac{and z}{r}$ | | $B\nu$ | | $C\delta\frac{h}{h_0}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $i, i'$ | $-\sin$ | $\cos$ | $-\sin$ | $\cos$ | $-\sin$ | $\cos$ |
| 0,0,0 | | +0.00157<br>−0.00245 | | −0.00145<br>−0.00974 | | −0.00002<br>−0.00004 |
| −1,1,0 | +0.00767 | +0.01940 | −0.00440 | +0.01582 | 0.00000 | +0.00004 |
| 0,1,0 | +0.475 | +0.321 | +0.156 | +0.115 | −0.006 | −0.002 |
| −1,2,0 | −0.260 | −0.192 | −0.031 | −0.004 | +0.004 | +0.002 |
| 1,0,0 | −0.32231 | −0.05021<br>−0.20202 | −0.14059 | −0.03957<br>−0.08547 | +0.00274 | −0.00004<br>−0.00004 |
| 2,0 | +0.005 | −0.349 | +0.022 | +0.037 | −0.005 | −0.007 |
| | −0.003 | +0.152 | −0.007 | −0.014 | | |
| | 0.000 | +0.243 | −0.018 | −0.026 | | |
| 3,0 | 0.000 | −0.061 | −0.019 | −0.027 | | |
| | 0.000 | +0.031 | +0.002 | +0.001 | | |
| | +0.002 | +0.046 | +0.020 | +0.028 | | |
| −2,−1 | −0.092 | +0.003 | −0.020 | −0.008 | | |
| | +0.058 | −0.001 | +0.030 | +0.009 | | |
| | +0.049 | −0.004 | −0.003 | 0.000 | | |
| −1,−1 | −0.422 | +0.120 | +0.046 | +0.005 | −0.013 | −0.004 |
| | +0.225 | −0.064 | −0.028 | −0.009 | +0.007 | +0.002 |
| | +0.195 | −0.054 | −0.021 | 0.000 | +0.007 | +0.002 |
| 0,−1 | +0.345 | +0.202 | +0.129 | +0.099 | | |
| | −0.193 | −0.111 | −0.129 | −0.076 | | |
| | −0.176 | −0.100 | +0.001 | −0.019 | | |
| 1,−1 | +0.034 | +0.089 | −0.013 | +0.023 | −0.003 | −0.005 |
| | −0.008 | −0.073 | +0.012 | −0.003 | +0.002 | +0.002 |
| | −0.009 | −0.060 | +0.007 | −0.022 | +0.002 | +0.002 |
| 2,−1 | +0.143 | −0.402 | +0.072 | −0.160 | +0.002 | +0.003 |
| | −0.077 | +0.199 | −0.009 | +0.037 | −0.001 | −0.002 |
| | −0.117 | +0.308 | −0.078 | +0.145 | −0.001 | −0.002 |
| 3,−1 | −0.255 | +0.058 | +0.029 | −0.028 | | |
| | +0.104 | −0.022 | −0.010 | +0.009 | | |
| | +0.191 | −0.053 | −0.019 | +0.024 | | |
| −1,−2 | +0.003 | +0.057 | −0.003 | +0.028 | | |
| | +0.001 | −0.051 | +0.002 | −0.037 | | |
| | −0.004 | −0.025 | +0.001 | +0.004 | | |

Digitized by Google

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,−2 | +0".026 | −0".023 | +0".004 | −0".059 | | |
| | −0.014 | +0.030 | −0.009 | +0.027 | | |
| | +0.006 | +0.028 | +0.003 | +0.036 | | |
| 1,−2 | −0.131 | +0.539 | −0.066 | +0.261 | −0".003 | +0".003 |
| | +0.076 | −0.274 | +0.049 | −0.048 | +0.004 | −0.001 |
| | +0.076 | −0.316 | +0.045 | −0.213 | +0.004 | −0.004 |
| 2,−2 | +0.024 | −0.068 | +0.060 | −0.004 | +0.046 | −0.014 |
| | −0.004 | +0.016 | −0.025 | +0.002 | −0.008 | +0.006 |
| | −0.036 | +0.052 | −0.042 | +0.003 | −0.008 | +0.006 |
| 3,−2 | +0.207 | +0.028 | −0.378 | −0.043 | | |
| | −0.119 | −0.007 | +0.115 | +0.010 | | |
| | −0.048 | −0.002 | +0.285 | +0.035 | | |
| 4,−2 | +0.112 | +0.184 | −0.031 | −0.023 | | |
| | −0.049 | −0.100 | +0.014 | +0.009 | | |
| | −0.085 | −0.124 | +0.021 | +0.024 | | |
| 0,−3 | +0.047 | −0.017 | +0.023 | −0.008 | —— | —— |
| | −0.03653 | +0.01276 | −0.02812 | +0.00799 | +0.00015 | +0.00025 |
| | −0.019 | +0.007 | +0.005 | +0.004 | —— | —— |
| 1,−3 | −0.11750 | +0.09942 | −0.08546 | +0.05362 | −0.00100 | +0.00020 |
| | +0.10097 | −0.08835 | +0.03355 | −0.01545 | +0.00049 | −0.00011 |
| | +0.10870 | −0.09523 | +0.06305 | −0.04051 | +0.00049 | −0.00008 |
| 2,−3 | +0.500 | −0.035 | +0.269 | −0.005 | +0.008 | —— |
| | −0.266 | +0.020 | −0.059 | −0.007 | −0.004 | —— |
| | −0.39466 | +0.02604 | −0.24049 | +0.01894 | −0.00274 | +0.00005 |
| 3,−3 | +0.070 | +0.084 | −0.076 | −0.079 | −0.009 | −0.007 |
| | −0.051 | −0.042 | +0.023 | +0.032 | +0.004 | +0.003 |
| | −0.011 | −0.040 | +0.051 | +0.059 | +0.004 | +0.003 |
| 4,−3 | −0.037 | −0.232 | +0.043 | +0.296 | | |
| | +0.022 | +0.107 | −0.019 | −0.094 | | |
| | +0.025 | +0.124 | −0.031 | −0.238 | | |
| 5,−3 | +0.081 | −0.110 | −0.042 | +0.040 | | |
| | −0.033 | +0.047 | +0.004 | −0.012 | | |
| | −0.069 | +0.086 | +0.009 | −0.033 | | |
| 1,−4 | −0.027 | +0.004 | −0.019 | −0.005 | | |
| | +0.023 | −0.002 | +0.015 | +0.014 | | |
| | +0.017 | −0.012 | +0.005 | −0.007 | | |
| 2,−4 | +0.127 | +0.069 | +0.086 | +0.060 | —— | −0.002 |
| | −0.092 | −0.043 | −0.031 | −0.022 | —— | +0.001 |
| | −0.112 | −0.067 | −0.069 | −0.052 | —— | +0.002 |
| 3,−4 | −0.116 | −0.177 | −0.075 | −0.226 | −0.007 | +0.008 |
| | +0.059 | +0.083 | +0.014 | +0.060 | +0.004 | −0.004 |
| | +0.096 | +0.180 | +0.071 | +0.199 | +0.004 | −0.003 |
| 4,−4 | +0.049 | −0.098 | −0.004 | +0.004 | | |
| | −0.046 | +0.040 | +0.002 | +0.001 | | |
| | −0.048 | +0.087 | +0.009 | −0.006 | | |
| 5,−4 | −0.295 | +0.136 | +0.167 | −0.070 | | |
| | +0.121 | −0.060 | −0.054 | +0.027 | | |
| | +0.220 | −0.109 | −0.142 | +0.056 | | |
| 6,−4 | −0.042 | −0.004 | +0.020 | +0.001 | | |
| | +0.048 | +0.001 | −0.007 | 0.000 | | |
| | +0.028 | +0.007 | −0.016 | −0.002 | | |

Digitized by Google

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1,−5 | −0.003 | −0.002 | −0.003 | +0.001 | | |
| | +0.002 | −0.003 | +0.002 | +0.006 | | |
| | +0.001 | −0.009 | +0.002 | −0.007 | | |
| 2,−5 | +0.022 | 0.000 | +0.014 | +0.015 | −0.002 | +0.003 |
| | −0.017 | +0.008 | +0.003 | −0.015 | +0.001 | −0.001 |
| | −0.021 | −0.013 | −0.019 | −0.003 | +0.001 | −0.001 |
| 3,−5 | −0.069 | +0.320 | +0.046 | −0.098 | +0.007 | −0.010 |
| | +0.042 | −0.161 | −0.019 | +0.032 | −0.004 | +0.005 |
| | +0.020 | −0.118 | −0.033 | +0.084 | −0.004 | +0.005 |
| 4,−5 | +0.208 | −0.073 | −0.292 | +0.199 | +0.011 | −0.002 |
| | −0.109 | +0.042 | +0.093 | −0.060 | −0.005 | +0.001 |
| | −0.072 | +0.002 | +0.226 | −0.164 | −0.005 | +0.001 |
| 5,−5 | −0.053 | −0.009 | −0.007 | +0.013 | −0.007 | —— |
| | +0.017 | +0.008 | +0.001 | −0.006 | +0.003 | —— |
| | +0.059 | +0.008 | 0.000 | −0.014 | +0.003 | —— |
| 6,−5 | +0.155 | +0.160 | −0.064 | −0.092 | | |
| | −0.064 | −0.067 | +0.024 | +0.030 | | |
| | −0.128 | −0.131 | +0.054 | +0.080 | | |
| 1,−6 | —— | —— | —— | —— | | |
| | +0.0011 | −0.0009 | +0.0007 | +0.0007 | | |
| | —— | —— | —— | —— | | |
| 2,−6 | +0.0036 | +0.0009 | +0.0027 | +0.0042 | −0.0004 | +0.0003 |
| | −0.0103 | +0.0037 | +0.0039 | −0.0029 | +0.0002 | −0.0002 |
| | −0.0073 | −0.0017 | −0.0073 | −0.0022 | +0.0002 | −0.0002 |
| 3,−6 | −0.052 | +0.058 | +0.014 | −0.022 | +0.004 | −0.001 |
| | +0.038 | −0.031 | −0.015 | +0.004 | −0.002 | 0.000 |
| | +0.0228 | −0.0198 | −0.0066 | +0.0208 | −0.0016 | +0.0007 |
| 4,−6 | +0.408 | −0.052 | −0.131 | −0.002 | −0.007 | 0.001 |
| | −0.179 | +0.015 | +0.044 | +0.001 | +0.003 | +0.001 |
| | −0.242 | +0.032 | +0.111 | −0.004 | +0.003 | +0.001 |
| 5,−6 | −0.151 | −0.183 | +0.202 | +0.159 | −0.004 | −0.008 |
| | +0.067 | +0.080 | −0.063 | −0.054 | +0.003 | +0.003 |
| | +0.097 | +0.119 | −0.170 | −0.130 | +0.003 | +0.003 |
| 6,−6 | −0.002 | +0.043 | +0.015 | +0.008 | +0.003 | +0.005 |
| | +0.002 | −0.018 | −0.005 | −0.001 | −0.002 | −0.002 |
| | −0.001 | −0.048 | −0.013 | −0.001 | −0.002 | −0.002 |

| | $-\varepsilon \sin$ | $\varepsilon \cos$ | $-\varepsilon \sin$ | $\varepsilon \cos$ | $-\varepsilon \sin$ | $\varepsilon \cos$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0,0 | | +0.96 | | −0.02 | | 0.00 |
| −1,1,0 | −0.28 | +0.79 | −1.19 | +0.26 | 0.00 | 0.00 |
| 0,1,0 | −1 | +9 | +1 | +7 | —— | —— |
| −1,2,0 | +5.1 | −19 | +3.6 | +12 | —— | —— |
| 1,0,0 | +5.82 | −22.09 | +1.18 | −18.96 | −0.01 | 0.00 |
| 2,0 | —— | +1 | | | | |
| | —— | +1 | | | | |
| | —— | +1 | | | | |
| 3,0 | −5 | +7 | +1 | −5 | | |
| | +1 | −2 | —— | —— | | |
| | +3 | −5 | −1 | +5 | | |

Digitized by Google

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| −1,−1 | —— | +1 | +2 | −1 | | |
| | +1 | −2 | —— | −2 | | |
| | +1 | −2 | −1 | +3 | | |
| 0,−1 | −5 | +4 | −8 | +6 | | |
| | −5 | +4 | −6 | +4 | | |
| | +1 | −1 | +15 | −11 | | |
| 1,−1 | −4 | −2 | −2 | −1 | | |
| | +3 | —— | +1 | +1 | | |
| | +2 | −1 | +4 | −1 | | |
| 2,−1 | +3 | −2 | +23 | −3 | | |
| | −10 | +1 | +1 | —— | | |
| | −8 | +2 | −23 | +12 | | |
| 0,−2 | −14 | −10 | −13 | −8 | | |
| | +8 | +7 | +2 | +3 | | |
| | +4 | +3 | +11 | +6 | | |
| 1,−2 | +114 | +87 | +64 | +48 | | |
| | −55 | −43 | −16 | −11 | | |
| | −60 | −46 | −48 | −36 | | |
| 2,−2 | +4 | +3 | +11 | +17 | +2 | +1 |
| | −4 | +2 | −2 | −6 | −1 | −1 |
| | −3 | −5 | −9 | −12 | −1 | −1 |
| 3,−2 | +39 | +128 | −28 | −80 | | |
| | −19 | −60 | +8 | +23 | | |
| | −18 | −64 | +22 | +61 | | |
| 0,−3 | −2 | −3 | −1 | −2 | | |
| | +0.94 | +4.20 | +0.35 | +2.92 | | |
| | —— | +2 | +1 | −1 | | |
| 1,−3 | +11.42 | +37.43 | +3.87 | +26.15 | +0.08 | −0.03 |
| | −4.70 | −19.10 | −0.64 | −7.37 | −0.04 | +0.02 |
| | −5.42 | −21.54 | −2.53 | −21.83 | −0.04 | +0.02 |
| 2,−3 | +45 | −120 | +25 | −64 | —— | —— |
| | −19 | +53 | −6 | +17 | —— | —— |
| | −30.41 | +81.77 | −21.15 | +51.15 | +0.34 | +0.02 |
| 3,−3 | +1 | +23 | +12 | −31 | | |
| | +1 | −12 | −5 | +11 | | |
| | −1 | −11 | −10 | +23 | | |
| 4,−3 | +99 | −67 | −58 | +43 | | |
| | −42 | +29 | +18 | −13 | | |
| | −65 | +44 | +47 | −35 | | |

Digitized by Google

| | $D\frac{u}{\cos i}$ | | $E\frac{u_1}{\cos i}$ | |
|---|---|---|---|---|
| $i,i'$ | −sin | cos | −sin | cos |
| 0,0,0 | | +0".01077 | | −0".01116 |
| −1,1,0 | −0".03303 | −0.01427 | +0".00003 | +0.01507 |
| 0,1,0 | +0.004 | −0.002 | +0.002 | +0.005 |
| −1,2,0 | +0.007 | +0.007 | −0.001 | −0.004 |
| 1,0,0 | −0.01574 | −0.00392 | −0.00026 | −0.00487 |
| 2,0 | —— | −0.012 | —— | −0.012 |
| | —— | −0.004 | —— | +0.008 |
| | —— | +0.020 | —— | +0.008 |
| −2,−1 | +0.001 | −0.001 | +0.001 | −0.002 |
| | −0.002 | +0.002 | −0.001 | +0.001 |
| | +0.001 | −0.001 | 0.000 | +0.001 |
| −1,−1 | −0.010 | −0.008 | −0.004 | +0.005 |
| | +0.021 | +0.009 | +0.003 | −0.004 |
| | −0.009 | +0.003 | +0.003 | −0.004 |
| 0,−1 | −0.001 | +0.009 | +0.004 | −0.006 |
| | −0.004 | −0.011 | −0.002 | +0.003 |
| | +0.005 | +0.001 | −0.002 | +0.003 |
| 1,−1 | +0.010 | −0.006 | −0.010 | +0.015 |
| | 0.000 | +0.027 | +0.007 | −0.010 |
| | −0.011 | −0.018 | +0.006 | −0.011 |
| 2,−1 | +0.004 | −0.002 | +0.003 | −0.004 |
| | +0.001 | −0.004 | −0.002 | +0.002 |
| | −0.005 | +0.006 | −0.002 | +0.003 |
| 3,−1 | −0.013 | +0.005 | −0.007 | +0.002 |
| | 0.000 | 0.000 | +0.005 | −0.001 |
| | +0.017 | −0.005 | +0.004 | −0.002 |
| −1,−2 | 0.000 | 0.000 | −0.003 | −0.001 |
| | +0.001 | +0.002 | +0.002 | +0.001 |
| | −0.003 | −0.002 | +0.002 | 0.000 |
| 0,−2 | −0.008 | −0.009 | +0.008 | +0.009 |
| | −0.002 | −0.005 | −0.005 | −0.007 |
| | +0.012 | +0.017 | −0.005 | −0.006 |
| 1,−2 | +0.003 | +0.005 | −0.005 | −0.002 |
| | −0.002 | 0.000 | +0.003 | +0.002 |
| | +0.001 | −0.008 | +0.004 | +0.001 |
| 2,−2 | +0.011 | −0.007 | +0.012 | +0.010 |
| | +0.003 | +0.003 | −0.008 | −0.007 |
| | −0.020 | +0.006 | −0.008 | −0.006 |
| 3,−2 | −0.004 | −0.002 | −0.002 | −0.001 |
| | 0.000 | 0.000 | +0.001 | +0.001 |
| | +0.007 | +0.002 | +0.002 | +0.001 |
| 4,−2 | +0.006 | +0.009 | +0.002 | +0.003 |
| | 0.000 | −0.001 | −0.001 | −0.002 |
| | −0.007 | −0.011 | −0.001 | −0.002 |
| 0,−3 | −0.001 | −0.004 | +0.001 | +0.003 |
| | +0.00413 | −0.00164 | −0.00137 | −0.00199 |
| | 0.000 | +0.007 | −0.001 | −0.002 |

Digitized by Google

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1,−3 | +0".00063 | +0".01274 | −0".00748 | −0".00752 |
| | −0.02040 | −0.00360 | +0.00511 | +0.00512 |
| | +0.01982 | −0.01347 | +0.00501 | +0.00503 |
| 2,−3 | +0.006 | +0.001 | +0.004 | +0.005 |
| | +0.004 | +0.002 | −0.002 | −0.004 |
| | −0.01450 | −0.00530 | −0.00285 | −0.00373 |
| 3,−3 | −0.014 | −0.017 | −0.006 | −0.013 |
| | −0.002 | −0.003 | +0.004 | +0.009 |
| | +0.020 | +0.026 | +0.005 | +0.009 |
| 4,−3 | +0.001 | +0.004 | —— | +0.001 |
| | 0.000 | 0.000 | —— | −0.001 |
| | 0.000 | −0.005 | —— | −0.001 |
| 5,−3 | +0.004 | −0.006 | +0.001 | −0.001 |
| | −0.001 | +0.001 | −0.001 | +0.001 |
| | −0.005 | +0.007 | −0.001 | +0.001 |
| 2,−6 | −0.0002 | −0.0008 | −0.0005 | +0.0006 |
| | +0.0005 | +0.0008 | +0.0003 | −0.0004 |
| | −0.0001 | +0.0004 | +0.0003 | −0.0004 |
| 3,−6 | +0.005 | +0.002 | +0.003 | +0.001 |
| | 0.000 | 0.000 | −0.002 | −0.001 |
| | −0.0075 | −0.0030 | −0.0020 | −0.0002 |

| | $-\varepsilon \sin$ | $\varepsilon \cos$ | $-\varepsilon \sin$ | $\varepsilon \cos$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,0,0 | | +85.11 | | −86.98 |
| −1,1,0 | −1.75 | −112.97 | −0.25 | +116.73 |
| 0,1,0 | +2 | −5 | −8 | +35 |
| −1,2,0 | −2.6 | +25 | +6.1 | −24 |
| 1,0,0 | +2.35 | −17.64 | +5.34 | −26.65 |
| 2,0 | +33 | −87 | +30 | −79 |
| | +10 | −27 | −19 | +52 |
| | −54 | +142 | −19 | +54 |
| 3,0 | −8 | +3 | −5 | +4 |
| | −1 | +3 | +4 | −3 |
| | +11 | −5 | +4 | −4 |
| −1,−1 | −4 | +4 | −42 | +35 |
| | +64 | −54 | +29 | −24 |
| | −58 | +46 | +28 | −24 |
| 0,−1 | −20 | +23 | +24 | −26 |
| | +2 | −8 | −19 | +18 |
| | +26 | −23 | −16 | +18 |
| 1,−1 | +94 | −28 | −101 | +33 |
| | −68 | +23 | +67 | −23 |
| | −52 | +13 | +67 | −23 |
| 2,−1 | +21 | −7 | +23 | −9 |
| | +8 | −5 | −16 | +7 |
| | −38 | +13 | −18 | +7 |
| 0,−2 | −72 | −46 | +72 | +46 |
| | −29 | −21 | −49 | −31 |
| | +125 | +82 | −49 | −32 |



Digitized by Google

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1, −2 | +30 | +6 | −32 | −14 |
| | −15 | −3 | +24 | +12 |
| | −25 | −4 | +23 | +11 |
| 2, −2 | +11 | +10 | +69 | +91 |
| | +23 | +30 | −46 | −62 |
| | −36 | −43 | −46 | −63 |
| 3, −2 | −24 | −27 | −13 | −11 |
| | −1 | +2 | +9 | +8 |
| | +33 | +35 | +10 | +9 |
| 0, −3 | −8 | −28 | +10 | +22 |
| | −5.26 | −2.92 | −6.24 | −15.94 |
| | +15 | +45 | −7 | −14 |
| 1, −3 | −24.52 | +97.27 | +9.64 | −49.84 |
| | −3.02 | +2.84 | −6.38 | +33.99 |
| | +35.66 | −132.21 | −6.17 | +33.62 |
| 2, −3 | −7 | −2 | +3 | +34 |
| | +5 | +8 | —— | −25 |
| | +6.61 | −6.56 | −1.75 | −24.05 |
| 3, −3 | +27 | −45 | +37 | −53 |
| | +4 | −4 | −24 | +36 |
| | −40 | +66 | −26 | +36 |
| 4, −3 | −11 | +31 | −3 | +10 |
| | +2 | −4 | +2 | −7 |
| | +15 | −39 | +2 | −8 |

In den vorstehenden Producten habe ich von den constanten Gliedern das Einfache angesetzt, weil sie keinen Multiplicationen mehr unterliegen. Um das Hinschreiben der vielen Nullen zu vermeiden, habe ich alle mit $\varepsilon$ multiplicirten Glieder in Einheiten von 0.00001 angesetzt, und werde damit fortfahren. In den drei ersten Producten habe ich die constanten Glieder und die Coefficienten von $\cos\eta$ in zwei getrennten Theilen angesetzt, und zwar enthält der erste Theil die Werthe, die aus den Combinationen $i'=0$, $k'=0$, und der zweite Theil die Werthe, die aus den Combinationen $i'=1$, $k'=1$; $i'=2$, $k'=2$ etc. entstanden sind. Der zweite Theil enthält also die Glieder, die zufolge des ersten Satzes des §. 7 (II) im Verhältniss $\frac{1}{2}e:1$ mit einander stehen müssen, während der erste Theil, indem er die Glieder in sich fasst, die aus den in der ersten Annäherung den Integralen hinzugefügten Constanten entstanden sind, zufolge des dritten Satzes des §. 7 (II) dieser Relation nicht gnügen kann. Da zufolge des angezogenen Paragraphen die aus den den Breitenstörungen hinzugefügten Constanten entstehenden Glieder dieser Relation gnügen, so war diese Trennung in den beiden letzten Producten nicht nöthig.

Digitized by Google

In den drei letzten Producten sind die meisten Glieder, wie man sieht, ganz unerheblich, und ich hätte sie daher ohne Schaden des Endresultats weglassen können. Da aber dieses das erste Mal ist, dass die vom Quadrat der störenden Kraft entstehenden Störungen eines der kleinen Planeten erscheinen, so wollte ich keines dieser Glieder weglassen.

## 55.

Addirt man nun die bez. Coefficienten der vorstehenden Producte, so bekommt man für das Differential von $\delta W_0$ die folgenden Coefficienten.

$\frac{d\delta W_0}{ds}$

| $i, i'$ | $-\sin$ | $\cos$ | $i, \quad i'$ | $-\sin$ | $\cos$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,0,0 | | +0.00010 | −1,−2 | −0.003 | +0.084 |
| | | −0.04259 | | +0.006 | −0.085 |
| −1,1,0 | −0.02973 | +0.03576 | | −0.004 | −0.023 |
| 0,1,0 | +0.631 | +0.437 | 0,−2 | +0.030 | −0.082 |
| −1,2,0 | −0.281 | −0.194 | | −0.030 | +0.045 |
| | | | | +0.046 | +0.075 |
| 1,0,0 | −0.47589 | −0.08982 | 1,−2 | −0.202 | +0.806 |
| | | −0.29632 | | +0.100 | −0.321 |
| 2,0 | +0.022 | −0.343 | | +0.127 | −0.537 |
| | −0.008 | +0.146 | 2,−2 | +0.123 | −0.077 |
| | −0.046 | +0.249 | | −0.042 | +0.020 |
| 3,0 | −0.019 | −0.088 | | −0.114 | +0.061 |
| | +0.002 | +0.032 | 3,−2 | −0.177 | −0.018 |
| | +0.022 | +0.074 | | −0.003 | +0.004 |
| −2,−1 | −0.110 | −0.008 | | +0.276 | +0.036 |
| | +0.085 | +0.011 | 4,−2 | +0.089 | +0.473 |
| | +0.047 | −0.004 | | −0.036 | −0.094 |
| −1,−1 | −0.403 | +0.118 | | −0.072 | −0.116 |
| | +0.228 | −0.066 | 0,−3 | +0.070 | −0.026 |
| | +0.175 | −0.053 | | −0.06474 | +0.01737 |
| 0,−1 | +0.477 | +0.304 | | −0.015 | +0.013 |
| | −0.328 | −0.195 | 1,−3 | −0.21095 | +0.15846 |
| | −0.172 | −0.115 | | +0.14976 | −0.10239 |
| 1,−1 | +0.018 | +0.116 | | +0.19722 | −0.14396 |
| | +0.013 | −0.057 | 2,−3 | +0.784 | −0.084 |
| | −0.005 | −0.109 | | −0.327 | +0.044 |
| 2,−1 | +0.224 | −0.565 | | −0.65548 | +0.03580 |
| | −0.088 | +0.232 | 3,−3 | −0.035 | −0.032 |
| | −0.203 | +0.460 | | −0.022 | −0.001 |
| 3,−1 | −0.246 | +0.037 | | +0.069 | +0.057 |
| | +0.099 | −0.014 | | | |
| | +0.193 | −0.036 | | | |



Digitized by Google

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 4,−3 | +0".0007 | +0".0069 | 3,−5 | −0".0016 | +0".0212 |
| | +0.003 | +0.012 | | +0.019 | −0.124 |
| | −0.006 | −0.120 | | −0.017 | −0.029 |
| 5,−3 | +0.074 | −0.077 | 4,−5 | −0.073 | +0.124 |
| | −0.031 | +0.037 | | −0.021 | −0.017 |
| | −0.066 | +0.061 | | +0.149 | −0.158 |
| 1,−4 | −0.046 | −0.001 | 5,−5 | −0.067 | +0.004 |
| | +0.038 | +0.012 | | +0.021 | +0.002 |
| | +0.022 | −0.019 | | +0.062 | −0.006 |
| 2,−4 | +0.213 | +0.127 | 6,−5 | +0.091 | +0.068 |
| | −0.123 | −0.066 | | −0.040 | −0.037 |
| | −0.184 | −0.117 | | −0.074 | −0.051 |
| 3,−4 | −0.198 | −0.395 | 1,−6 | 0.000 | 0.000 |
| | +0.077 | +0.139 | | +0.0018 | −0.0002 |
| | +0.171 | +0.376 | | 0.000 | 0.000 |
| 4,−4 | +0.045 | −0.094 | 2,−6 | +0.0052 | +0.0052 |
| | −0.014 | +0.041 | | −0.0054 | +0.0010 |
| | −0.039 | +0.081 | | −0.0142 | −0.0041 |
| 5,−4 | −0.128 | +0.066 | 3,−6 | −0.026 | +0.040 |
| | +0.067 | −0.033 | | +0.019 | −0.028 |
| | +0.078 | −0.053 | | +0.0051 | −0.0015 |
| 6,−4 | −0.020 | −0.003 | 4,−6 | +0.270 | −0.055 |
| | +0.011 | +0.001 | | −0.132 | +0.017 |
| | +0.012 | +0.005 | | −0.128 | +0.032 |
| 1,−5 | −0.006 | −0.001 | 5,−6 | +0.047 | −0.032 |
| | +0.004 | +0.003 | | +0.007 | +0.029 |
| | +0.003 | −0.016 | | −0.070 | −0.008 |
| 2,−5 | +0.034 | +0.018 | 6,−6 | +0.016 | +0.056 |
| | −0.013 | −0.008 | | −0.005 | −0.021 |
| | −0.039 | −0.019 | | −0.046 | −0.051 |

| | $-\varepsilon \sin$ | $\varepsilon \cos$ | | $-\varepsilon \sin$ | $\varepsilon \cos$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,0,0 | | −0.93 | 1,−1 | −16 | +2 |
| −1,1,0 | −3.47 | +4.84 | | +3 | +1 |
| | | | | +21 | −12 |
| 0,1,0 | −3 | +46 | | | |
| −1,2,0 | +5.3 | −6 | 2,−1 | +70 | −21 |
| 1,0,0 | +17.68 | −85.34 | | −17 | +3 |
| | | | | −87 | +34 |
| 2,0 | +63 | −165 | | | |
| | −9 | +26 | 0,−2 | −27 | −18 |
| | −73 | +197 | | −68 | −42 |
| | | | | +91 | +59 |
| 3,0 | −14 | +9 | | | |
| | +4 | −2 | 1,−2 | +176 | +127 |
| | +14 | −9 | | −62 | −45 |
| | | | | −110 | −75 |
| −1,−1 | −44 | +39 | 2,−2 | +95 | +124 |
| | +94 | −79 | | −29 | −36 |
| | −30 | +23 | | −94 | −123 |
| 0,−1 | −9 | +7 | 3,−2 | −26 | +10 |
| | −28 | +18 | | −3 | −27 |
| | +26 | −17 | | +47 | +44 |

Digitized by Google

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 0, −3 | −1 | −11 | 3, −3 | +77 | −106 |
| | −10.21 | −11.74 | | −24 | +31 |
| | +9 | +32 | | −77 | +114 |
| 1, −3 | +0.46 | +110.68 | 4, −3 | +27 | +17 |
| | −14.75 | +10.38 | | −20 | +5 |
| | +21.50 | −141.91 | | −1 | −38 |
| 2, −3 | +66 | −149 | | | |
| | −20 | +53 | | | |
| | −56.08 | +102.33 | | | |

Vermöge des ersten Satzes des §. 7 (II) muss hier die Gleichung

$$-0.01259+0.29632\times\tfrac{1}{2}e=0$$

stattfinden, nnd die Substitution des numerischen Werthes von $e$ in diese Gleichung giebt $-0.00002$, welche Uebereinstimmung als sehr gut bezeichnet werden muss, da die Unrichtigkeiten der letzten Stelle der Zahlen in dieser Gleichung, deren Glieder aus dem Aggregat vieler Glieder bestehen, leicht eine Unrichtigkeit von einer grössern Anzahl von Einheiten in den letzten Stellen der obigen Zahlenwerthe hätte hervorbringen können. Um näher zu zeigen, wie hier die Fehler der letzten Stellen beschaffen sind, bemerke ich, dass der angeführte Satz für jede der Combinationen $i'=1$, $k'=1$; $i'=2$, $k'=2$, etc. und für die drei ersten Producte, sowie für die beiden letzten abgesondert stattfinden muss, und habe daher aus meinen Rechnungen die zu jeder derselben gehörigen Zahlenwerthe ausgezogen, die ich hier anführe. Die Zahlen der ersten Zeile sind im Ganzen aus den beiden letzten mit $u$ und $u_1$ multiplicirten Producten, die der übrigen Zeilen für die beigesetzten Combinationen aus den drei ersten Producten entstanden.

| für | soll sein | wird |
|---|---|---|
| | $-0.00039+0.00879\times\tfrac{1}{2}e=0=-0.00002$ | |
| $i'=k'=1$, | $-0.00003+0.00032\times\tfrac{1}{2}e=0=-0.00002$ | |
| $i'=k'=2$, | $-0.00057+0.01560\times\tfrac{1}{2}e=0=+0.00009$ | |
| $i'=k'=3$, | $-0.01168+0.27361\times\tfrac{1}{2}e=0=-0.00007$ | |
| $i'=k'=4$, | $-0.00007+0.00044\times\tfrac{1}{2}e=0=-0.00005$ | |
| $i'=k'=5$, | $+0.00015-0.00287\times\tfrac{1}{2}e=0=+0.00003$ | |
| $i'=k'=6$, | $0.00000+0.00043\times\tfrac{1}{2}e=0=+0.00002$ | |
| Summe | $-0.01259+0.29632\times\tfrac{1}{2}e=0=-0.00002$ | |

wie oben.

Die Anwendung der im vor. § erklärten Controlen gab stets nur Unterschiede von höchstens zwei bis drei Einheiten der letzten Stelle, und ich halte nicht für nöthig, diese hier speciell anzuführen; ich mache

Digitized by Google

nur aufmerksam darauf, dass das Product $C\partial\frac{h}{h_0}$ gleich Null werden muss, wenn man darin $\eta$ in $\varepsilon$ verwandelt, und da ich die letzten Stellen immer unverändert so gelassen habe, wie die Rechnung sie mir gegeben hat, so ist aus der bez. Tafel des vor. Art. ohne Weiteres ersichtlich, wie die Controle für dieses Product mit der Rechnung übereinstimmt.

## 56.

Die für die Hauptprüfung der Rechnung zu berechnenden, im Art. 20 angegebenen Producte fanden sich wie folgt. Zuerst

| $\left(\frac{d\bar{T}}{d\lambda}\right)\delta\lambda$ | | |
|---|---|---|
| $i,\ i'$ | $-\sin$ | $\cos$ |
| 1, −3 | +0.00005 | 0.00000 |

und dann

| | $A'\frac{a\cos z}{r}$ | | $B'\nu$ | | $D'\frac{u}{\cos i}+E'\frac{u_1}{\cos i}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $i,i'$ | $-\sin$ | $\cos$ | $-\sin$ | $\cos$ | $-\sin$ | $\cos$ |
| 0,0 | | +0.00737 | | +0.00714 | | +0.00041 |
| 1,0 | −0.155 | −0.117 | −0.055 | −0.039 | −0.003 | −0.003 |
| 2,0 | +0.008 | +0.123 | −0.007 | −0.013 | 0.000 | +0.008 |
| 3,0 | −0.002 | +0.010 | +0.007 | +0.011 | 0.000 | 0.000 |
| −2,−1 | +0.020 | −0.003 | +0.008 | +0.002 | 0.000 | 0.000 |
| −1,−1 | +0.141 | −0.035 | −0.014 | −0.002 | +0.004 | +0.001 |
| 0,−1 | −0.115 | −0.068 | −0.040 | −0.030 | 0.000 | −0.001 |
| 1,−1 | −0.004 | −0.037 | +0.013 | −0.013 | +0.002 | −0.003 |
| 2,−1 | −0.056 | +0.148 | −0.024 | +0.051 | −0.001 | +0.001 |
| 3,−1 | +0.090 | −0.024 | −0.010 | +0.006 | +0.006 | −0.001 |
| −1,−2 | −0.002 | −0.015 | 0.000 | −0.010 | −0.001 | 0.000 |
| 0,−2 | −0.010 | +0.015 | −0.003 | +0.022 | −0.001 | −0.001 |
| 1,−2 | +0.046 | −0.182 | +0.026 | −0.087 | +0.004 | −0.002 |
| 2,−2 | −0.009 | +0.029 | −0.027 | −0.001 | −0.010 | −0.001 |
| 3,−2 | −0.047 | −0.005 | +0.123 | +0.014 | +0.004 | +0.001 |
| 4,−2 | −0.033 | −0.052 | +0.009 | +0.005 | −0.001 | −0.004 |
| 0,−3 | −0.009 | +0.001 | −0.003 | +0.004 | +0.002 | 0.000 |
| 1,−3 | +0.05078 | −0.03383 | +0.03623 | −0.01864 | +0.00269 | −0.00140 |
| 2,−3 | −0.170 | +0.025 | −0.086 | +0.004 | −0.005 | −0.005 |
| 3,−3 | −0.025 | −0.033 | +0.023 | +0.031 | +0.007 | +0.011 |
| 4,−3 | +0.023 | +0.082 | −0.021 | −0.099 | +0.001 | −0.002 |
| 5,−3 | −0.023 | +0.039 | +0.004 | −0.009 | −0.003 | +0.003 |
| 1,−4 | +0.012 | 0.000 | +0.010 | +0.002 | | |
| 2,−4 | −0.049 | −0.029 | −0.030 | −0.028 | | |
| 3,−4 | +0.042 | +0.060 | +0.020 | +0.072 | | |

Digitized by Google

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 4,−4 | −0".026 | +0".037 | +0".004 | +0".002 | | |
| 5,−4 | +0.097 | −0.046 | −0.054 | +0.021 | | |
| 6,−4 | +0.008 | +0.004 | −0.007 | +0.001 | | |
| 1,−5 | +0.002 | +0.002 | 0.000 | 0.000 | | |
| 2,−5 | −0.007 | +0.001 | −0.002 | −0.010 | | |
| 3,−5 | +0.022 | −0.108 | −0.024 | +0.039 | | |
| 4,−5 | +0.020 | −0.037 | +0.093 | −0.066 | | |
| 5,−5 | +0.026 | +0.009 | +0.005 | −0.004 | | |
| 6,−5 | −0.053 | −0.054 | +0.027 | +0.028 | | |
| 2,−6 | −0.0019 | +0.0002 | −0.0005 | −0.0020 | +0".0003 | +0".0002 |
| 3,−6 | +0.024 | −0.021 | −0.005 | +0.006 | −0.004 | −0.001 |
| 4,−6 | −0.139 | +0.012 | +0.050 | +0.003 | | |
| 5,−6 | +0.055 | +0.062 | −0.065 | −0.049 | | |
| 6,−6 | −0.001 | −0.022 | −0.005 | −0.001 | | |

| | $-\varepsilon \sin$ | $\varepsilon \cos$ | $-\varepsilon \sin$ | $\varepsilon \cos$ | $-\varepsilon \sin$ | $\varepsilon \cos$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | | +0.31 | | +0.52 | | +1.88 |
| 1,0 | —— | −3 | —— | −2 | +5 | −14 |
| 2,0 | —— | —— | —— | —— | −19 | +55 |
| 3,0 | +2 | −3 | −2 | +2 | +5 | −2 |
| −1,−1 | —— | —— | −1 | —— | +17 | −14 |
| 0,−1 | +2 | −2 | +3 | −2 | −3 | +2 |
| 1,−1 | +1 | +1 | +2 | −1 | +4 | −5 |
| 2,−1 | −1 | +1 | −6 | +1 | −20 | +6 |
| 0,−2 | +7 | +5 | +5 | +4 | −2 | −2 |
| 1,−2 | −39 | −30 | −20 | −16 | +5 | +8 |
| 2,−2 | +1 | +2 | −4 | −6 | −25 | −37 |
| 3,−2 | −13 | −43 | +9 | +26 | +14 | +16 |
| 0,−3 | —— | +2 | —— | +1 | −1 | +6 |
| 1,−3 | −3.11 | −14.77 | −0.70 | −10.25 | +5.18 | −14.33 |
| 2,−3 | −14 | +42 | −8 | +20 | +6 | −16 |
| 3,−3 | +2 | −10 | −6 | +10 | −22 | +36 |
| 4,−3 | −33 | +22 | +19 | −14 | +7 | +17 |

Die hier in den beiden letzten Columnen gegebenen Zahlen habe ich aus den bez. Tafeln für die Längenstörungen genommen, die Zahlen der übrigen Columnen mussten aber direct berechnet werden. Die Addition dieser Zahlengrössen giebt nun

| $\frac{d\delta \frac{h_0}{h}}{d\varepsilon}$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $i,i'$ | $-\sin$ | $\cos$ | $i,\ i'$ | $-\sin$ | $\cos$ |
| 0,0 | | +0".01492 | −2,−1 | +0".028 | −0".001 |
| 1,0 | −0".213 | −0.159 | −1,−1 | +0.131 | −0.036 |
| 2,0 | +0.001 | +0.118 | 0,−1 | −0.155 | −0.099 |
| 3,0 | +0.005 | +0.021 | 1,−1 | +0.011 | −0.053 |

Digitized by Google

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2,−1 | −0".081 | +0".200 | 3,−4 | +0".062 | +0".132 |
| 3,−1 | +0.086 | −0.019 | 4,−4 | −0.022 | +0.039 |
| −1,−2 | −0.003 | −0.025 | 5,−4 | +0.043 | −0.025 |
| 0,−2 | −0.014 | +0.036 | 6,−4 | +0.001 | +0.005 |
| 1,−2 | +0.076 | −0.271 | 1,−5 | +0.002 | +0.002 |
| 2,−2 | −0.046 | +0.027 | 2,−5 | −0.009 | −0.009 |
| 3,−2 | +0.080 | +0.010 | 3,−5 | −0.002 | −0.069 |
| 4,−2 | −0.025 | −0.051 | 4,−5 | +0.113 | −0.103 |
| 0,−3 | −0.010 | +0.005 | 5,−5 | +0.031 | +0.005 |
| 1,−3 | +0.08975 | −0.05387 | 6,−5 | −0.026 | −0.026 |
| 2,−3 | −0.261 | +0.024 | 2,−6 | −0.0021 | −0.0046 |
| 3,−3 | +0.005 | +0.009 | 3,−6 | +0.015 | −0.016 |
| 4,−3 | +0.003 | −0.049 | 4,−6 | −0.089 | +0.015 |
| 5,−3 | −0.022 | +0.033 | 5,−6 | −0.010 | +0.013 |
| 1,−4 | +0.022 | +0.002 | 6,−6 | −0.006 | −0.023 |
| 2,−4 | −0.079 | −0.057 | | | |

| | $-\varepsilon \sin$ | $\varepsilon \cos$ | | $-\varepsilon \sin$ | $\varepsilon \cos$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | | +2.71 | 2,−2 | −28 | −41 |
| 1,0 | +5 | −19 | 3,−2 | +10 | −1 |
| 2,0 | −19 | +55 | 0,−3 | −1 | +9 |
| 3,0 | +5 | −3 | 1,−3 | +1.37 | −39.35 |
| −1,−1 | +16 | −14 | 2,−3 | −16 | +16 |
| 0,−1 | +2 | −2 | 3,−3 | −26 | +36 |
| 1,−1 | +7 | −5 | 4,−3 | −7 | −9 |
| 2,−1 | −27 | +8 | | | |
| 0,−2 | +10 | +7 | | | |
| 1,−2 | −54 | −38 | | | |

## 57.

Ferner sind die folgenden noch zu den Längenstörungen, der Bedingungsgleichung und den Störungen des Radius gehörigen Producte berechnet worden.

| | $\left(\frac{dW_2}{d\eta}\right)\frac{an\delta z}{r}$ | | $\nu^2$ | | $2\nu . \delta \frac{h}{h_0}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $i, i'$ | cos | sin | cos | sin | cos | sin |
| 0,0 | −4".0753 | | +1".0394 | | −0".027 | |
| 1,0 | +0.355 | +1".029 | +0.235 | +0".133 | −0.211 | −0".124 |
| 2,0 | +0.628 | +2.805 | +0.154 | +0.663 | 0.000 | +0.002 |
| 3,0 | +0.002 | +0.049 | −0.002 | −0.004 | −0.001 | −0.003 |
| −2,−1 | −0.021 | +0.015 | +0.003 | +0.002 | +0.002 | 0.000 |
| −1,−1 | −0.765 | +0.173 | −0.035 | −0.001 | +0.012 | +0.004 |
| 0,−1 | +0.267 | +0.272 | −0.093 | −0.057 | −0.036 | −0.032 |
| 1,−1 | +0.334 | +0.243 | −0.063 | −0.021 | +0.043 | +0.017 |
| 2,−1 | −0.207 | +0.516 | −0.046 | +0.083 | +0.008 | −0.021 |
| 3,−1 | +0.040 | +0.011 | +0.002 | +0.001 | 0.000 | 0.000 |

Digitized by Google

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| −1,−2 | +0.001 | +0.044 | 0.000 | +0.020 | 0.000 | −0.004 |
| 0,−2 | +0.044 | −0.794 | −0.027 | +0.134 | +0.015 | −0.071 |
| 1,−2 | +0.334 | −1.216 | −0.098 | +0.285 | +0.005 | +0.063 |
| 2,−2 | −0.834 | +0.090 | −0.177 | +0.018 | +0.113 | −0.022 |
| 3,−2 | −1.459 | −0.129 | −0.346 | −0.034 | −0.075 | −0.004 |
| 4,−2 | −0.037 | −0.020 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 0,−3 | +0.038 | −2.066 | +0.055 | −0.116 | −0.062 | +0.086 |
| 1,−3 | −2.9365 | +2.2401 | +0.7303 | −0.5866 | −0.049 | +0.026 |
| 2,−3 | −2.375 | +0.435 | +0.242 | +0.026 | −0.179 | −0.034 |
| 3,−3 | +2.572 | +2.212 | +0.671 | +0.554 | −0.030 | −0.020 |
| 4,−3 | +0.081 | +0.236 | +0.006 | +0.039 | +0.005 | +0.026 |
| 5,−3 | −0.004 | +0.042 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 0,−4 | +0.043 | +0.009 | +0.002 | −0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 1,−4 | −0.118 | +0.044 | +0.029 | −0.004 | −0.009 | +0.001 |
| 2,−4 | −0.187 | −0.107 | +0.036 | +0.016 | −0.002 | +0.003 |
| 3,−4 | +0.238 | +0.207 | +0.047 | +0.048 | −0.016 | −0.023 |
| 4,−4 | +0.021 | −0.049 | +0.007 | −0.015 | +0.002 | −0.004 |
| 5,−4 | +0.054 | −0.028 | +0.008 | −0.005 | +0.010 | −0.006 |
| 6,−4 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 1,−5 | −0.023 | +0.039 | +0.004 | 0.000 | −0.002 | 0.000 |
| 2,−5 | −0.014 | −0.214 | −0.007 | +0.045 | +0.014 | −0.013 |
| 3,−5 | −0.244 | −0.337 | −0.086 | +0.096 | +0.060 | −0.062 |
| 4,−5 | −0.912 | +0.630 | −0.214 | +0.154 | −0.041 | +0.030 |
| 5,−5 | −0.035 | +0.011 | −0.004 | 0.000 | −0.004 | −0.001 |
| 6,−5 | −0.011 | −0.015 | −0.002 | −0.002 | −0.004 | −0.003 |
| 1,−6 | −0.021 | −0.012 | −0.001 | −0.001 | 0.000 | 0.000 |
| 2,−6 | −0.0493 | +0.1071 | +0.0081 | −0.0227 | −0.007 | +0.007 |
| 3,−6 | −0.877 | +1.063 | +0.078 | −0.038 | −0.065 | +0.022 |
| 4,−6 | +1.018 | +0.019 | +0.303 | −0.010 | −0.020 | +0.003 |
| 5,−6 | +0.118 | +0.080 | +0.020 | +0.013 | +0.015 | +0.012 |
| 6,−6 | +0.004 | +0.011 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

| | ε cos | ε sin | ε cos | ε sin | ε cos | ε sin |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | −524 | | +128 | | +4 | |
| 1,0 | −81 | +26 | −22 | +20 | +27 | −34 |
| 2,0 | −1150 | +756 | −287 | +189 | —— | —— |
| 3,0 | −20 | +10 | —— | −1 | —— | —— |
| −1,−1 | −5 | +15 | +1 | +1 | −2 | +1 |
| 0,−1 | −83 | +65 | +20 | −16 | −3 | +2 |
| 1,−1 | −14 | +13 | −1 | −2 | +2 | —— |
| 2,−1 | −118 | +5 | −28 | +1 | +3 | —— |
| 0,−2 | −162 | −99 | +33 | +21 | −17 | −11 |
| 1,−2 | −308 | −232 | +70 | +50 | +13 | +13 |
| 2,−2 | −91 | −188 | −11 | −38 | +4 | +22 |
| 3,−2 | −124 | −374 | −28 | −86 | −6 | −17 |
| 0,−3 | −189 | −213 | −21 | −25 | +14 | +22 |
| 1,−3 | +235.3 | +826.4 | −69.4 | −214.3 | +4 | +6 |
| 2,−3 | −299 | −363 | −5 | +23 | +14 | −33 |
| 3,−3 | −288 | +865 | −69 | +222 | +3 | −7 |
| 4,−3 | −52 | +50 | −8 | +6 | −6 | +5 |

Digitized by Google

| | $\varepsilon^2 \cos$ | $\varepsilon^2 \sin$ | $\varepsilon^3 \cos$ | $\varepsilon^3 \sin$ | $\varepsilon^4 \cos$ | $\varepsilon^4 \sin$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | −1.78 | | +0.44 | | 0.00 | |
| 1,0 | −0.18 | −0.04 | +0.01 | −0.04 | −0.01 | +0.04 |
| 2,0 | −1.47 | −1.01 | −0.37 | −0.25 | 0 | 0 |
| 3,0 | −0.03 | −0.02 | 0 | 0. | 0 | 0 |

| | $\left(\frac{d^2W_0}{d\eta^2}\right)\frac{a n d z}{r}$ | | $\left(\frac{dW_0}{d\eta}\right)\frac{a n d z}{r} \cdot \frac{a e \sin \varepsilon}{r}$ | |
|---|---|---|---|---|
| $i, i'$ | sin | −cos | −sin | cos |
| 0,0 | | −0.04873 | | +0.04859 |
| 1,0 | −0.447 | −0.960 | +0.372 | +0.121 |
| 2,0 | −0.627 | −2.832 | 0.000 | −0.043 |
| 3,0 | −0.004 | −0.052 | −0.028 | −0.121 |
| −2,−1 | −0.030 | +0.017 | −0.033 | +0.007 |
| −1,−1 | −0.842 | +0.182 | +0.012 | +0.011 |
| 0,−1 | −0.013 | +0.059 | +0.047 | +0.004 |
| 1,−1 | −0.264 | −0.193 | −0.019 | +0.010 |
| 2,−1 | +0.222 | −0.539 | −0.012 | −0.010 |
| 3,−1 | −0.054 | −0.004 | +0.009 | −0.022 |
| −1,−2 | +0.001 | +0.051 | +0.002 | −0.036 |
| 0,−2 | +0.010 | −0.627 | +0.012 | −0.054 |
| 1,−2 | −0.082 | +0.310 | −0.040 | +0.038 |
| 2,−2 | +0.796 | −0.113 | −0.076 | +0.048 |
| 3,−2 | +1.525 | +0.134 | +0.033 | −0.003 |
| 4,−2 | +0.042 | +0.028 | +0.064 | +0.005 |
| 0,−3 | +0.099 | −2.091 | −0.128 | +0.096 |
| 1,−3 | −0.1037 | +0.0739 | −0.0979 | +0.1103 |
| 2,−3 | +2.324 | −0.394 | +0.233 | +0.003 |
| 3,−3 | −2.553 | −2.187 | +0.109 | −0.012 |
| 4,−3 | −0.082 | −0.263 | −0.105 | −0.095 |
| 5,−3 | +0.007 | −0.046 | −0.008 | −0.014 |
| 0,−4 | +0.043 | +0.041 | −0.005 | +0.001 |
| 1,−4 | −0.056 | +0.016 | −0.010 | −0.005 |
| 2,−4 | +0.149 | +0.084 | +0.015 | +0.008 |
| 3,−4 | −0.237 | −0.186 | +0.009 | +0.003 |
| 4,−4 | −0.017 | +0.045 | −0.008 | −0.010 |
| 5,−4 | −0.067 | +0.035 | −0.004 | +0.002 |
| 6,−4 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 1,−5 | −0.021 | +0.050 | −0.004 | −0.010 |
| 2,−5 | +0.023 | +0.093 | −0.011 | −0.013 |
| 3,−5 | +0.215 | +0.414 | −0.038 | +0.036 |
| 4,−5 | +0.959 | −0.656 | +0.009 | +0.014 |
| 5,−5 | +0.037 | −0.011 | +0.039 | −0.027 |
| 6,−5 | +0.016 | +0.029 | +0.003 | −0.004 |
| 4,−6 | −0.018 | −0.013 | −0.004 | +0.007 |
| 2,−6 | +0.0412 | −0.0363 | −0.0345 | +0.0457 |
| 3,−6 | +0.844 | −1.046 | +0.045 | −0.004 |
| 4,−6 | −0.973 | −0.021 | +0.042 | −0.042 |
| 5,−6 | −0.133 | −0.098 | −0.044 | −0.003 |
| 6,−6 | −0.004 | −0.006 | −0.007 | −0.003 |

Digitized by Google

| | $\varepsilon \sin$ | $-\varepsilon \cos$ | $-\varepsilon \sin$ | $\varepsilon \cos$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,0 | | +1.63 | | +2.47 |
| 1,0 | +50 | +5 | −6 | +32 |
| 2,0 | +1150 | −756 | +3 | −2 |
| 3,0 | +20 | −10 | +49 | −32 |
| −1,−1 | −7 | +17 | −4 | +3 |
| 0,−1 | −29 | +23 | −1 | +1 |
| 1,−1 | +9 | −7 | −1 | −3 |
| 2,−1 | +125 | −5 | +1 | −1 |
| 0,−2 | −121 | −72 | −13 | −10 |
| 1,−2 | +78 | +64 | +3 | −4 |
| 2,−2 | +85 | +183 | +8 | −6 |
| 3,−2 | +130 | +393 | +4 | +8 |
| 0,−3 | −494 | −229 | +10 | +35 |
| 1,−3 | +3.3 | +43.1 | +7.5 | −4.8 |
| 2,−3 | +297 | +397 | −22 | +2 |
| 3,−3 | +286 | −860 | +11 | +16 |
| 4,−3 | +56 | −46 | +12 | −37 |

| | $\varepsilon^2 \sin$ | $-\varepsilon^2 \cos$ | $-\varepsilon^2 \sin$ | $\varepsilon^2 \cos$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,0 | | +0.003 | | −0.004 |
| 1,0 | +0.10 | +0.04 | +0.09 | −0.04 |
| 2,0 | +1.47 | +1.01 | +0.01 | 0.00 |
| 3,0 | +0.03 | +0.02 | +0.06 | +0.04 |

## 58.

Die für die Breitenstörungen erforderlichen Producte habe ich wie folgt gefunden.

| | $\frac{A''}{\cos i}\frac{\partial x}{r}$ | | $\frac{B''}{\cos i}\nu$ | | $\frac{C''}{\cos i}\vartheta\frac{h}{h_0}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $i,i'$ | cos | −sin | cos | −sin | cos | −sin |
| 0,0,0 | −0.00114 | | −0.00052 | | −0.00003 | |
| −1,1,0 | −0.00662 | +0.03331 | +0.00056 | +0.07869 | +0.00002 | −0.00072 |
| 0,1,0 | +0.001 | −0.003 | +0.002 | −0.005 | —— | —— |
| −1,2,0 | −0.020 | −0.011 | −0.006 | −0.012 | —— | —— |
| 1,0,0 | +0.01389 | +0.01837 | +0.00631 | +0.01924 | +0.00029 | +0.00039 |
| 2,0 | +0.001 | +0.002 | +0.001 | +0.001 | | |
| | −0.014 | −0.009 | +0.024 | +0.021 | | |
| | −0.017 | −0.001 | −0.024 | −0.022 | | |
| 3,0 | +0.002 | +0.002 | 0.000 | 0.000 | | |
| | −0.008 | +0.001 | −0.005 | −0.002 | | |
| | +0.005 | −0.002 | +0.005 | +0.002 | | |

Digitized by Google

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| −2,−1 | 0″.000 | 0″.000 | 0″.000 | −0″.002 | | |
| | −0.003 | +0.009 | −0.001 | +0.008 | | |
| | +0.005 | −0.012 | +0.001 | −0.006 | | |
| −1,−1 | 0.000 | +0.002 | 0.000 | 0.000 | | |
| | −0.010 | −0.026 | −0.008 | −0.026 | | |
| | +0.006 | +0.019 | +0.007 | +0.023 | | |
| 0,−1 | −0.003 | −0.001 | −0.005 | +0.001 | | |
| | +0.014 | +0.017 | +0.017 | +0.010 | | |
| | −0.009 | −0.038 | −0.013 | −0.009 | | |
| 1,−1 | −0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | | |
| | −0.035 | −0.021 | −0.066 | −0.030 | | |
| | +0.053 | +0.027 | +0.066 | +0.027 | | |
| 2,−1 | +0.003 | +0.002 | +0.004 | +0.003 | | |
| | +0.007 | −0.011 | +0.012 | 0.000 | | |
| | −0.013 | +0.001 | −0.017 | −0.005 | | |
| 3,−1 | 0.000 | +0.001 | 0.000 | 0.000 | | |
| | +0.011 | −0.010 | −0.018 | +0.011 | | |
| | +0.003 | +0.001 | +0.018 | −0.012 | | |
| −1,−2 | +0.002 | 0.000 | +0.003 | 0.000 | | |
| | −0.014 | −0.006 | −0.007 | −0.002 | | |
| | +0.016 | +0.013 | +0.005 | +0.002 | | |
| 0,−2 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | | |
| | +0.043 | −0.001 | +0.043 | −0.005 | | |
| | −0.036 | +0.001 | −0.042 | +0.003 | | |
| 1,−2 | −0.003 | 0.000 | 0.000 | −0.001 | | |
| | 0.000 | −0.006 | −0.014 | +0.009 | | |
| | +0.023 | +0.003 | +0.017 | −0.005 | | |
| 2,−2 | −0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | | |
| | −0.008 | +0.035 | +0.030 | −0.043 | | |
| | −0.021 | +0.009 | −0.030 | +0.042 | | |
| 3,−2 | −0.001 | −0.002 | −0.002 | +0.002 | | |
| | −0.001 | −0.009 | −0.001 | +0.007 | | |
| | −0.001 | +0.005 | +0.002 | −0.008 | | |
| 4,−2 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | | |
| | −0.005 | +0.017 | −0.004 | −0.014 | | |
| | −0.004 | −0.010 | +0.003 | +0.014 | | |
| 0,−3 | 0.000 | +0.003 | 0.000 | +0.003 | | |
| | +0.0103 | −0.0108 | +0.0085 | −0.0105 | +0.0003 | −0.0006 |
| | −0.029 | +0.014 | −0.007 | +0.005 | | |
| 1,−3 | −0.0003 | +0.0004 | −0.0006 | −0.0007 | 0.0000 | 0.0000 |
| | −0.0062 | +0.0271 | −0.0102 | +0.0125 | −0.0002 | +0.0001 |
| | +0.0123 | −0.0120 | +0.0109 | −0.0116 | +0.0002 | −0.0001 |
| 2,−3 | +0.001 | −0.003 | +0.003 | 0.000 | | |
| | −0.006 | +0.035 | 0.000 | −0.018 | | |
| | −0.0056 | +0.0076 | −0.0012 | +0.0195 | +0.0003 | −0.0004 |
| 3,−3 | −0.001 | +0.001 | 0.000 | 0.000 | | |
| | −0.040 | −0.029 | +0.026 | +0.035 | | |
| | +0.011 | −0.001 | −0.026 | −0.038 | | |
| 4,−3 | +0.001 | +0.001 | −0.001 | −0.003 | | |
| | +0.006 | +0.006 | −0.003 | −0.004 | | |
| | −0.016 | +0.004 | +0.004 | +0.005 | | |

Digitized by Google

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 5, −3 | −0".001 | −0".001 | 0".000 | 0".000 | | |
| | −0.014 | −0.001 | +0.009 | 0.000 | | |
| | +0.009 | +0.001 | −0.009 | −0.001 | | |
| 1, −6 | 0.000 | 0.000 | —— | 0.000 | | |
| | −0.0003 | −0.0006 | —— | −0.0002 | | |
| | 0.000 | 0.000 | —— | 0.000 | | |
| 2, −6 | −0.0003 | +0.0008 | +0.0004 | −0.0004 | 0.0000 | 0.0000 |
| | +0.0085 | −0.0048 | −0.0005 | −0.0009 | −0.0001 | +0.0002 |
| | +0.0002 | +0.0005 | +0.0004 | +0.0014 | +0.0001 | −0.0002 |
| 3, −6 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | | |
| | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | | |
| | +0.0038 | −0.0087 | −0.0007 | +0.0044 | +0.0001 | +0.0004 |

| | $\varepsilon \cos$ | $-\varepsilon \sin$ | $\varepsilon \cos$ | $-\varepsilon \sin$ | $\varepsilon \cos$ | $-\varepsilon \sin$ |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0,0 | −0.11 | | −0.20 | | 0.00 | |
| −1,1,0 | −9 | −1 | —— | −2 | —— | —— |
| 0,1,0 | —— | —— | —— | —— | —— | —— |
| −1,2,0 | +1 | −1 | −3 | +1 | —— | —— |
| 1,0,0 | +1.31 | −0.36 | +2.36 | −0.40 | −0.02 | −0.13 |
| 2,0 | —— | —— | —— | —— | | |
| | −9 | +5 | +7 | −3 | | |
| | —— | —— | −7 | +3 | | |
| 0, −3 | —— | —— | —— | —— | | |
| | +3.1 | −1.0 | +2.8 | +1.1 | | |
| | —— | —— | −2 | −1 | | |
| 1, −3 | −0.1 | —— | −0.2 | —— | | |
| | −9.2 | +0.8 | −5.8 | +1.0 | | |
| | +3.1 | −0.1 | +6.1 | −0.9 | | |
| 2, −3 | —— | —— | —— | —— | | |
| | +6 | —— | —— | —— | | |
| | −2.0 | 0.0 | +0.5 | −0.5 | 0.0 | −0.1 |
| 3, −3 | —— | —— | —— | —— | | |
| | −10 | +9 | +3 | −2 | | |
| | +5 | −4 | −2 | +2 | | |
| 4, −3 | —— | —— | —— | —— | | |
| | +3 | −1 | −2 | —— | | |
| | −2 | —— | +2 | −1 | | |

| | $\frac{D_1''}{\cos i} \frac{u}{\cos i}$ | | $\frac{E_1''}{\cos i} \frac{u_1}{\cos i}$ | |
|---|---|---|---|---|
| | cos | −sin | cos | −sin |
| 0,0,0 | +0".00127 | | +0".00009 | |
| −1,1,0 | −0.00125 | −0".00646 | −0.00009 | −0".00200 |
| 0,1,0 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| −1,2,0 | +0.013 | +0.005 | 0.000 | +0.002 |
| 1,0,0 | −0.01472 | −0.00561 | −0.00106 | −0.00256 |
| 2,0 | −0.001 | —— | | |
| | 0.000 | —— | | |
| | +0.001 | —— | | |

Digitized by Google

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| −2, −1 | 0".000 | 0".000 | | |
| | −0.001 | +0.001 | | |
| | +0.001 | −0.001 | | |
| −1, −1 | 0.000 | −0.001 | | |
| | −0.001 | +0.001 | | |
| | +0.001 | 0.000 | | |
| 0, −1 | 0.000 | 0.000 | 0".000 | 0".000 |
| | −0.004 | −0.011 | −0.003 | −0.002 |
| | +0.004 | +0.011 | +0.003 | +0.002 |
| 1, −1 | 0.000 | +0.001 | | |
| | +0.002 | −0.001 | | |
| | −0.003 | 0.000 | | |
| 2, −1 | 0.000 | 0.000 | | |
| | −0.002 | +0.007 | | |
| | −0.002 | −0.007 | | |
| −1, −2 | 0.000 | 0.000 | | |
| | −0.001 | −0.001 | | |
| | +0.001 | +0.002 | | |
| 0, −2 | +0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| | −0.001 | −0.002 | −0.001 | −0.001 |
| | 0.000 | +0.001 | +0.001 | +0.001 |
| 1, −2 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| | +0.013 | +0.001 | +0.004 | +0.003 |
| | −0.013 | −0.002 | −0.004 | −0.003 |
| 2, −2 | −0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| | +0.001 | +0.002 | −0.001 | −0.001 |
| | 0.000 | −0.001 | +0.001 | +0.001 |
| 3, −2 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| | −0.005 | −0.005 | +0.004 | +0.003 |
| | +0.005 | +0.006 | −0.004 | −0.003 |
| 0, −3 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| | +0.0017 | −0.0031 | −0.0003 | −0.0003 |
| | −0.001 | +0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 1, −3 | −0.0001 | +0.0016 | −0.0002 | +0.0002 |
| | +0.0025 | −0.0035 | +0.0016 | −0.0002 |
| | −0.0024 | +0.0018 | −0.0014 | 0.0000 |
| 2, −3 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| | 0.000 | +0.014 | −0.002 | +0.002 |
| | −0.0006 | −0.0162 | +0.0023 | −0.0021 |
| 3, −3 | 0.000 | −0.001 | | |
| | −0.002 | −0.001 | | |
| | +0.002 | +0.001 | | |
| 4, −3 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| | −0.003 | +0.003 | −0.002 | +0.002 |
| | +0.003 | −0.003 | +0.002 | −0.002 |
| 2, −6 | 0.0000 | −0.0001 | —— | —— |
| | +0.0001 | +0.0009 | —— | —— |
| | 0.0000 | −0.0008 | —— | —— |
| 3, −6 | 0.000 | 0.000 | | |
| | 0.000 | 0.000 | | |
| | +0.0010 | +0.0011 | −0.0001 | +0.0003 |

Digitized by Google

| | $\varepsilon \cos$ | $-\varepsilon \sin$ | $\varepsilon \cos$ | $-\varepsilon \sin$ |
|---|---|---|---|---|
| 0,0,0 | +8.08 | | +0.17 | |
| −1,1,0 | −8.08 | −0.25 | −0.17 | −0.27 |
| 0,1,0 | —— | —— | —— | —— |
| −1,2,0 | +96 | −17 | +2 | −1 |
| 1,0,0 | −95.20 | +16.78 | −2.07 | +0.30 |
| 2,0 | −8 | +1 | | |
| | −2 | +2 | | |
| | +10 | −5 | | |
| 3,0 | —— | —— | —— | —— |
| | −10 | +6 | +2 | −1 |
| | +9 | −6 | −2 | +1 |
| 0,−3 | +2 | —— | +1 | —— |
| | +9.7 | −3.4 | −2.0 | −0.8 |
| | −11 | +3 | +1 | —— |
| 1,−3 | −3.9 | +2.1 | −1.6 | +0.9 |
| | +21.4 | +2.7 | +11.8 | +0.6 |
| | −17.4 | −4.7 | −10.2 | −1.5 |
| 2,−3 | −3 | —— | —— | —— |
| | −33 | +21 | −20 | +9 |
| | +37.2 | −20.2 | +20.6 | −9.3 |
| 3,−3 | +5 | −4 | —— | —— |
| | −19 | +6 | +10 | −2 |
| | +13 | −1 | −10 | +2 |
| 4,−3 | +1 | —— | −1 | —— |
| | +22 | −24 | −14 | +15 |
| | −23 | +25 | +15 | −16 |

39.

Die Summe der vorstehenden Producte giebt:

| | $\frac{1}{\cos i}\frac{d\delta_1 R_0}{d\varepsilon}$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $i,i'$ | cos | −sin | $i,\ i'$ | cos | −sin |
| 0,0,0 | −0.00033 | | −2,−1 | 0.000 | −0.002 |
| −1,1,0 | −0.00854 | +0.10312 | | −0.005 | +0.048 |
| | | | | +0.007 | −0.019 |
| 0,1,0 | −0.004 | −0.008 | | | |
| −1,2,0 | −0.013 | −0.016 | −1,−1 | 0.000 | +0.001 |
| 1,0,0 | +0.00471 | +0.02983 | | −0.019 | −0.051 |
| | | | | +0.014 | +0.042 |
| 2,0 | +0.003 | +0.003 | 0,−1 | −0.008 | 0.000 |
| | +0.010 | +0.012 | | +0.024 | +0.014 |
| | −0.010 | −0.023 | | −0.015 | −0.034 |
| 3,0 | +0.002 | +0.002 | 1,−1 | −0.001 | +0.001 |
| | −0.013 | −0.001 | | −0.099 | −0.052 |
| | +0.010 | 0.000 | | +0.116 | +0.051 |

Digitized by Google

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 2,−1 | +0".007 | +0".005 | 1,−3 | −0".0012 | +0".0012 |
| | +0.017 | −0.004 | | −0.0125 | +0.0660 |
| | −0.028 | −0.011 | | +0.0196 | −0.0819 |
| 3,−1 | 0.000 | +0.001 | 2,−3 | +0.004 | −0.003 |
| | −0.007 | +0.001 | | −0.008 | +0.033 |
| | +0.021 | −0.011 | | −0.0048 | +0.0084 |
| −1,−2 | +0.005 | 0.000 | 3,−3 | −0.001 | 0.000 |
| | −0.022 | −0.009 | | −0.016 | +0.005 |
| | +0.022 | +0.017 | | −0.013 | −0.038 |
| 0,−2 | +0.001 | 0.000 | 4,−3 | 0.000 | +0.001 |
| | +0.084 | −0.009 | | −0.002 | +0.007 |
| | −0.077 | +0.009 | | −0.007 | +0.004 |
| 1,−2 | −0.003 | −0.001 | 5,−3 | −0.001 | −0.001 |
| | +0.003 | +0.007 | | −0.005 | −0.001 |
| | +0.023 | −0.007 | | 0.000 | 0.000 |
| 2,−2 | −0.002 | 0.000 | 1,−6 | 0.000 | 0.000 |
| | +0.022 | −0.007 | | −0.0003 | −0.0008 |
| | −0.050 | +0.051 | | 0.000 | 0.000 |
| 3,−2 | −0.003 | 0.000 | 2,−6 | −0.0002 | +0.0003 |
| | −0.003 | −0.004 | | +0.0080 | −0.0046 |
| | +0.002 | 0.000 | | +0.0007 | +0.0009 |
| 4,−2 | 0.000 | 0.000 | 3,−6 | 0.000 | 0.000 |
| | −0.009 | +0.003 | | 0.000 | 0.000 |
| | −0.001 | +0.004 | | +0.0041 | −0.0025 |
| 0,−3 | 0.000 | +0.006 | | | |
| | +0.0177 | −0.0253 | | | |
| | −0.037 | +0.021 | | | |

| | ε cos | −ε sin | | ε cos | −ε sin |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,0,0 | +7.94 | | 0,−3 | +3 | —— |
| −1,1,0 | −17 | −4 | | +13.6 | −4.1 |
| 0,1,0 | —— | —— | | −12 | +2 |
| −1,2,0 | +96 | −18 | 1,−3 | −5.8 | +3.0 |
| 1,0,0 | −93.62 | +16.19 | | +18.2 | +5.1 |
| 2,0 | −8 | +1 | | −18.4 | −7.5 |
| | −4 | +4 | 2,−3 | −3 | —— |
| | +3 | −2 | | −17 | +30 |
| 3,0 | —— | —— | | +56.3 | −30.1 |
| | −8 | +5 | 3,−3 | +5 | −4 |
| | +7 | −5 | | −16 | +11 |
| | | | | +6 | −1 |
| | | | 4,−3 | —— | —— |
| | | | | +9 | −10 |
| | | | | −8 | +8 |

Digitized by Google

Endlich ist noch das folgende Product berechnet worden.

$$\frac{1}{\cos i}\left(\frac{dR_2}{d\eta}\right)\frac{\alpha n \delta z}{r}$$

| $i,i'$ | sin | cos | $i,\ i'$ | sin | cos |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | | +0".371 | 2,−2 | +0".032 | +0".071 |
| 1,0 | −0".187 | −0.031 | 3,−2 | +0.040 | +0.066 |
| 2,0 | −0.238 | +0.148 | 4,−2 | −0.002 | −0.006 |
| 3,0 | −0.005 | +0.003 | 0,−3 | +0.161 | +0.152 |
| −2,−1 | +0.003 | +0.004 | 1,−3 | −0.241 | +0.282 |
| −1,−1 | +0.011 | +0.034 | 2,−3 | +0.098 | +0.202 |
| 0,−1 | −0.062 | +0.030 | 3,−3 | −0.502 | −0.118 |
| 1,−1 | −0.046 | +0.009 | 4,−3 | −0.012 | −0.001 |
| 2,−1 | −0.041 | +0.033 | 1,−6 | −0.014 | −0.005 |
| 3,−1 | −0.016 | +0.010 | 2,−6 | +0.007 | +0.006 |
| −1,−2 | +0.015 | +0.002 | 3,−6 | −0.088 | +0.176 |
| 0,−2 | +0.068 | +0.037 | 4,−6 | −0.073 | −0 152 |
| 1,−2 | +0.048 | +0.068 | 5,−6 | −0.006 | −0.011 |
| | $\varepsilon$ sin | $\varepsilon$ cos | | $\varepsilon$ sin | $\varepsilon$ cos |
| 0,0 | | +1066 | 0,−3 | +759 | +1367 |
| 1,0 | −14 | +129 | 1,−3 | −1260 | −135 |
| 2,0 | −1305 | +1616 | 2,−3 | +1168 | +1014 |
| 3,0 | −23 | +31 | 3,−3 | −1333 | +287 |
| | | | 4,−3 | −57 | +39 |
| | $\varepsilon^2$ sin | $\varepsilon^2$ cos | | | |
| 0,0 | | +5.22 | | | |
| 1,0 | +0.09 | +0.53 | | | |
| 2,0 | +2.40 | +1.68 | | | |
| 3,0 | +0.05 | +0.10 | | | |

Hiemit sind alle Producte berechnet, die in der Regel für die vom Quadrat der störenden Kraft abhängigen Glieder erfordert werden, indem das Quadrat der Saturnmasse, und mehr noch das der Marsmasse nur Unmerkliches würde geben können.

Da die aus dem Vorhergehenden sich ergebenden Breitenstörungen klein ausfallen werden, und ausserdem Controlen vorhanden sind, so habe ich nicht für nöthig gehalten, von der durch die Gleichung (101) (I) zu erlangenden Controle Gebrauch zu machen.



Digitized by Google

60.

Es ist noch der Producte zu erwähnen, die in dem zweiten Theil der Breitenstörungen zufolge des §. 8 (II) vorkommen, die zwar in der Regel unmerklich sind, aber in ganz einzelnen Fällen Merkliches geben könnten. Von dem Quadrat $\frac{u^2}{\cos^2 i}$ und dem Product $\frac{u}{\cos i} \cdot \frac{u_1}{\cos i}$ braucht wohl weiter nichts gesagt zu werden, da diese beiden Producte auf dieselbe Weise erhalten werden können, wie $\nu^2$ und $\left(\frac{dW_0}{d\eta}\right)\frac{\alpha n \delta z}{r}$, deren Berechnung im Art. 54 erklärt wurde. Es ist daher nur noch das Differential der $I'$ genannten Function zu betrachten, welche auch in der Reduction der Länge auf die Fundamentalebene zufolge des §. 4 (I) vorkommt. Nach §. 8 (II) ist

$$\frac{dI'}{d\varepsilon}\cos i = \frac{r}{a} \cdot \frac{u}{\cos i} \quad \frac{1}{2\cos\varphi}\, a^2 \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$$

setzen wir daher in demselben Sinne wie im Art. 27

$$\frac{1}{2\cos\varphi}\, a^2 \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = Z_s \sin(i,i) + Z_c \cos(i,i)$$

und wenden wieder den dort eingeführten Ausdruck für $\frac{u}{\cos i}$ an, so wird

$$\frac{u}{\cos i}\,\frac{1}{2\cos\varphi}\, a^2 \left(\frac{d\Omega}{dZ}\right) = (Z_c d_c \mp Z_s d_s)\cos(i \pm k, i' \pm k') + (Z_s d_c \pm Z_c d_s)\sin(i \pm k, i' \pm k')$$

Zählt man die partiellen Producte wie folgt

$$\begin{matrix}(3)\,,(4)\\(2)\,,(1)\end{matrix}$$

so bekommt man dieses Product durch folgendes Schema

$$\begin{aligned}&\{(1)-(3)\}\cos(i+k, i'+k') + \{(2)+(4)\}\sin(i+k, i'+k')\\ &+\{(1)+(3)\}\cos(i-k, i'-k') + \{(2)-(4)\}\sin(i-k, i'-k')\end{aligned}$$

welches dem Schema (22) analog ist. Wenn man nach der Ausführung dieser Multiplication irgend ein Glied dieses Products mit

$$Z\,(i,i')\,\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}\,(i,i')$$

bezeichnet, so ist das entsprechende Glied in

$$\frac{dI'}{d\varepsilon}\cos i = \left\{Z(i,i') - \tfrac{e}{2}\,Z(i+1,i') - \tfrac{e}{2}\,Z(i-1,i')\right\}\begin{matrix}\cos\\ \sin\end{matrix}(i,i')$$

Nehmen wir in unserm Beispiel blos auf das Glied, welches bei der Integration den kleinsten Divisor bekommt, und auf die Säcularänderungen Rücksicht, so wird

Digitized by Google

| $\frac{dr}{de}\cos i$ | | |
|---|---|---|
| $i, i'$ | cos | sin |
| 0,0 | +0.00244 | 0.0000 |
| 1,—3 | +0.0048 | |
| | $\varepsilon$ cos | $\varepsilon$ sin |
| 0,0 | 0.00 | |
| 1,0 | +1 | —4 |
| 2,0 | —5 | +14 |

welches sehr unbedeutend ist, obgleich die Neigung der Egeriabahn ziemlich gross ist.

## §. 6. Integration der im vor. § berechneten Glieder.

### 61.

Die im vor. § vorkommenden Glieder, welche $\varepsilon$ nicht ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen enthalten, können ohne Ausnahme nach den in den §§. 4 und 5 (II) entwickelten Formeln integrirt werden, aber die, welche diesen Factor enthalten, verlangen besondere Vorschriften, da daraus in den Integralen theils ähnliche Glieder und theils solche hervorgehen, die den Factor nicht mehr haben. Lässt man einstweilen die willkührlichen Constanten weg, so findet man leicht allgemein

$$\int \varepsilon \sin\{(i-i'\mu)\varepsilon - U\}\,d\varepsilon = -\frac{1}{i-i'\mu}\varepsilon\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon-U\} + \frac{1}{(i-i'\mu)^2}\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon-U\}$$

$$\int \varepsilon \cos\{(i-i'\mu)\varepsilon - U\}\,d\varepsilon = \frac{1}{i-i'\mu}\varepsilon\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon-U\} + \frac{1}{(i-i'\mu)^2}\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon-U\}$$

wozu als Ausnahme das Integral

$$\int \varepsilon d\varepsilon = \tfrac{1}{2}\varepsilon^2$$

gerechnet werden muss. Ferner wird

$$\int \varepsilon^2 \sin i\varepsilon\, d\varepsilon = -\frac{1}{i}\varepsilon^2\cos i\varepsilon + \frac{2}{i^2}\varepsilon\sin i\varepsilon + \frac{2}{i^3}\cos i\varepsilon$$

$$\int \varepsilon^2 \cos i\varepsilon\, d\varepsilon = \frac{1}{i}\varepsilon^2\sin i\varepsilon + \frac{2}{i^2}\varepsilon\cos i\varepsilon - \frac{2}{i^3}\sin i\varepsilon$$

wozu als Ausnahme $\int \varepsilon^2 d\varepsilon = \frac{1}{3}\varepsilon^3$ gerechnet werden muss. Die Glieder der vorstehenden Integrale, in welchen der Factor $\varepsilon$ in einer niedrigeren



Digitized by Google

Potenz vorkommt wie im Differential, bekommen in der Störungstheorie im Allgemeinen weit kleinere Coefficienten wie die ausserdem vorhandenen Glieder derselben Form, und können daher in den meisten Fällen übergangen werden, allein in gewissen Fällen, und namentlich in den Gliedern, die kleine Divisoren bekommen, können sie gross, und manchmal grösser werden wie jene; man darf sie daher in der allgemeinen Entwickelung der Integrale nicht übergehen.

## 62.

Bei der Entwickelung der Integrale der Glieder der Differentiale zweiter Ordnung in Bezug auf die störenden Kräfte betrachten wir zuerst wie im §. 4 (II) den allgemeinen Fall, von welchem $i''=0$ ausgeschlossen ist. Wenn man, so weit es geschehen kann, dieselben Bezeichnungen wie dort anwendet, und wieder zur Abkürzung

$$(i,i') = (i-i''\mu)\varepsilon - i''(c'-c\mu)$$

setzt, so ist im vor. § das Differential von $\delta W_0$ in folgender Form erhalten worden

$$\begin{aligned}
\tfrac{d\delta W_0}{dt} = &- \Sigma F(i,i',c)\sin(i,i') + \Sigma F(i,i',s)\cos(i,i') \\
&- \Sigma G(i,i',c)\sin(-\eta+(i,i')) + \Sigma G(i,i',s)\cos(-\eta+(i,i')) \\
&- \Sigma H(i,i',c)\sin(\eta+(i,i')) \quad + \Sigma H(i,i',s)\cos(\eta+(i,i')) \\
&-\varepsilon\Sigma F(i,i',c)\sin(i,i') \quad +\varepsilon\Sigma F(i,i',s)\cos(i,i') \\
&-\varepsilon\Sigma G(i,i',c)\sin(-\eta+(i,i')) +\varepsilon\Sigma G(i,i',s)\cos(-\eta+(i,i')) \\
&-\varepsilon\Sigma H(i,i',c)\sin(\eta+(i,i')) \quad +\varepsilon\Sigma H(i,i',s)\cos(\eta+(i,i'))
\end{aligned}$$

Setzt man nun beides für die Indices $c$ und $s$

$$F_1(i,i') = \tfrac{F(i,i')}{i-i'\mu};\ G_1(i,i') = \tfrac{G(i,i')}{i-i'\mu};\ H_1(i,i') = \tfrac{H(i,i')}{i-i'\mu}$$

$$F'_1(i,i') = \tfrac{F'(i,i')}{i-i'\mu};\ G'_1(i,i') = \tfrac{G'(i,i')}{i-i'\mu};\ H'_1(i,i') = \tfrac{H'(i,i')}{i-i'\mu}$$

und hierauf

$$\begin{aligned}
F_n(i,i',c) &= F_1(i,i',c) + \tfrac{F_1(i,i',s)}{i-i'\mu} \\
G_n(i,i',c) &= G_1(i,i',c) + \tfrac{G'_1(i,i',s)}{i-i'\mu} \\
H_n(i,i',c) &= H_1(i,i',c) + \tfrac{H'_1(i,i',s)}{i-i'\mu} \\
F_n(i,i',s) &= F_1(i,i',s) - \tfrac{F'_1(i,i',c)}{i-i'\mu} \\
G_n(i,i',s) &= G_1(i,i',s) - \tfrac{G'_1(i,i',c)}{i-i'\mu} \\
H_n(i,i',s) &= H_1(i,i',s) - \tfrac{H'_1(i,i',c)}{i-i'\mu}
\end{aligned}$$

Digitized by Google

so wird

$$\begin{aligned}
\delta W_0 = {} & \Sigma F_\alpha(i,i',c)\cos(i,i') && + \Sigma F_\alpha(i,i',s)\sin(i,i') \\
& + \Sigma G_\alpha(i,i',c)\cos(-\eta+(i,i')) && + \Sigma G_\alpha(i,i',s)\sin(-\eta+(i,i')) \\
& + \Sigma H_\alpha(i,i',c)\cos(\eta+(i,i')) && + \Sigma H_\alpha(i,i',s)\sin(\eta+(i,i')) \\
& + \varepsilon\Sigma F_1'(i,i',c)\cos(i,i') && + \varepsilon\Sigma F_1'(i,i',s)\sin(i,i') \\
& + \varepsilon\Sigma G_1'(i,i',c)\cos(-\eta+(i,i')) && + \varepsilon\Sigma G_1'(i,i',s)\sin(-\eta+(i,i')) \\
& + \varepsilon\Sigma H_1'(i,i',c)\cos(\eta+(i,i')) && + \varepsilon\Sigma H_1'(i,i',s)\sin(\eta+(i,i'))
\end{aligned}$$

und setzt man ferner

$$\begin{aligned}
P(i,i') &= F_\alpha(i,i') + G_\alpha(i+1,i') + H_\alpha(i-1,i') \\
P'(i,i') &= F_1'(i,i') + G_1'(i+1,i') + H_1'(i-1,i') \\
Q(i,i') &= G_\alpha(i+1,i') - H_\alpha(i-1,i') \\
Q'(i,i') &= G_1'(i+1,i') - H_1'(i-1,i')
\end{aligned}$$

wo wie immer das Weglassen der Indices $c$ und $s$ bedeuten soll, dass die Ausdrücke für jeden derselben besonders gelten, so ergiebt sich

$$\begin{aligned}
\delta W_0 = {} & \Sigma P(i,i',c)\cos(i,i') + \Sigma P(i,i',s)\sin(i,i') \\
& + \varepsilon\Sigma P'(i,i',c)\cos(i,i') + \varepsilon\Sigma P'(i,i',s)\sin(i,i') \\
\left(\frac{d\delta W_0}{d\eta}\right) = {} & \Sigma Q(i,i',c)\sin(i,i') - \Sigma Q(i,i',s)\cos(i,i') \\
& + \varepsilon\Sigma Q'(i,i',c)\sin(i,i') - \varepsilon\Sigma Q'(i,i',s)\cos(i,i')
\end{aligned}$$

## 63.

Die Producte

$$\left(\frac{d W_0}{d\eta}\right)\frac{a n \delta z}{r}\ ;\ \nu^2\ ;\ \left(\frac{d^2 W_0}{d\eta^2}\right)\frac{a n \delta z}{r}\ ;\ \left(\frac{d W_0}{d\eta}\right)\frac{a n \delta z}{r}\ .\ \frac{a e \sin\varepsilon}{r}$$

sind im vor. § für unser Beispiel einzeln angegeben worden, bildet man nun aus den dort angegebenen Coefficienten die Summen, und setzt

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d W_0}{d\eta}\right)\frac{a n \delta z}{r} + \nu^2 = {} & \Sigma J(i,i',c)\cos(i,i') + \Sigma J(i,i',s)\sin(i,i') \\
& + \varepsilon\Sigma J(i,i',c)\cos(i,i') + \varepsilon\Sigma J(i,i',s)\sin(i,i') \\
\left(\frac{d^2 W_0}{d\eta^2}\right)\frac{a n \delta z}{r} - \left(\frac{d W_0}{d\eta}\right)\frac{a n \delta z}{r}\ .\ \frac{a e \sin\varepsilon}{r} = {} & \Sigma K(i,i',c)\sin(i,i') - \Sigma K(i,i',s)\cos(i,i') \\
& + \varepsilon\Sigma K'(i,i',c)\sin(i,i') - \varepsilon\Sigma K'(i,i',s)\cos(i,i')
\end{aligned}$$

und hierauf

$$\begin{aligned}
M(i,i') &= P(i,i') + J(i,i') \\
M'(i,i') &= P'(i,i') + J(i,i') \\
N(i,i') &= Q(i,i') + K(i,i') \\
N'(i,i') &= Q'(i,i') + K(i,i')
\end{aligned}$$

dann wird

Digitized by Google

$$\frac{d\delta z}{dt} = \Sigma M(i,i',c)\cos(i,i') + \Sigma M(i,i',s)\sin(i,i')$$
$$+\varepsilon\Sigma M'(i,i',c)\cos(i,i') + \varepsilon\Sigma M'(i,i',s)\sin(i,i')$$

und

$$-2\frac{d\delta\nu}{dt} = \Sigma N(i,i',c)\sin(i,i') - \Sigma N(i,i',s)\cos(i,i')$$
$$+\varepsilon\Sigma N'(i,i',c)\sin(i,i') - \varepsilon\Sigma N'(i,i',s)\cos(i,i')$$

Um die letztere zu integriren, setze man

$$S_1(i,i') = \frac{N(i,i')}{i-i'\mu}\ ;\ S_1'(i,i') = \frac{N'(i,i')}{i-i'\mu}$$

$$S_n(i,i',c) = S_1(i,i',c) + \frac{S_{n-1}'(i,i',s)}{i-i'\mu}$$

$$S_n(i,i',s) = S_1(i,i',s) - \frac{S_{n-1}'(i,i',c)}{i-i'\mu}$$

dann wird

$$2\delta\nu = \Sigma S_n(i,i',c)\cos(i,i') + \Sigma S_n(i,i',s)\sin(i,i')$$
$$+\varepsilon\Sigma S_1'(i,i',c)\cos(i,i') + \varepsilon\Sigma S_1'(i,i',s)\sin(i,i')$$

## 64.

Wenn die Integrationen bis hieher ausgeführt sind, dann kann die in §. 3 analytisch entwickelte Bedingungsgleichung angewandt, und durch dieselbe geprüft werden, ob die vorangegangenen numerischen Rechnungen richtig ausgeführt worden sind. Unter den drei in (80), (81), (82) (I) angegebenen Formen dieser Gleichung habe ich in §. 3 die dritte benutzt, und werde auch diese hier anwenden, es liegt der Grund dafür darin, dass durch die Anwendung der zweiten Form das Quadrat $\nu^2$ uncontrolirt bleiben würde, und dass das Product $2\nu\delta\frac{h_0}{h}$ aus weit wenigeren Gliedern besteht, wie das statt dessen in der ersten Form vorkommende Product $2\nu\frac{d\delta z}{dt}$, und also leichter zu berechnen ist, wie dieses. Die Gleichung (1) stelle ich jetzt für ihre Anwendung zur Controle der numerischen Rechnungen wie folgt,

$$\frac{d\delta z}{dt} + 2\delta\nu = \delta\frac{h_0}{h} + 2\nu\frac{d\eta}{n} + 3\nu^2 + 2\nu\delta\frac{h}{h_0}$$

und für unser Beispiel sind die beiden letzten Glieder dieser Gleichung im vor. § schon berechnet worden. Setzen wir nun für das Differential von $\delta\frac{h_0}{h}$, welches für unser Beispiel im Art. 56 berechnet worden ist,

$$\frac{d\delta\frac{h_0}{h}}{dt} = -\Sigma\Pi(i,i',c)\sin(i,i') + \Sigma\Pi(i,i',s)\cos(i,i')$$
$$-\varepsilon\Sigma\Pi'(i,i',c)\sin(i,i') + \varepsilon\Sigma\Pi'(i,i',s)\cos(i,i')$$

dann wird

Digitized by Google

$$\delta\frac{h_0}{h} = \Sigma\Pi_a(i,i',c)\cos(i,i') + \Sigma\Pi_a(i,i',s)\sin(i,i')$$
$$+\varepsilon\Sigma\Pi_1'(i,i',c)\cos(i,i') + \varepsilon\Sigma\Pi_1'(i,i',s)\sin(i,i')$$

nachdem

$$\Pi_1(i,i') = \frac{\Pi(i,i')}{i-i'\mu};\quad \Pi_1'(i,i') = \frac{\Pi'(i,i')}{i-i'\mu}$$
$$\Pi_a(i,i',c) = \Pi_1(i,i',c) + \frac{\Pi'_1(i,i',s)}{i-i'\mu}$$
$$\Pi_a(i,i',s) = \Pi_1(i,i',s) - \frac{\Pi'_1(i,i',c)}{i-i'\mu}$$

gesetzt worden ist. Sei nun

$$\nu^2 = \Sigma\Upsilon(i,i',c)\cos(i,i') + \Sigma\Upsilon(i,i',s)\sin(i,i')$$
$$+\varepsilon\Sigma\Upsilon'(i,i',c)\cos(i,i') + \varepsilon\Sigma\Upsilon'(i,i',s)\sin(i,i')$$
$$2\nu\delta\frac{h}{h_0} = \Sigma\Psi(i,i',c)\cos(i,i') + \Sigma\Psi(i,i',s)\sin(i,i')$$
$$= \varepsilon\Sigma\Psi'(i,i',c)\cos(i,i') + \varepsilon\Sigma\Psi'(i,i',s)\sin(i,i')$$

und aus der Berechnung der Störungen erster Ordnung in Bezug auf die störenden Kräfte

$$2\nu = \Sigma S_0(i,i',c)\cos(i,i') + \Sigma S_0(i,i',s)\sin(i,i')$$

dann bekommen wir zufolge der angeführten Bedingungsgleichung mit Ausschluss einiger zu $i'=0$ gehörigen Glieder für jeden Werth von $i$ und $i'$ zur Prüfung der vorangegangenen numerischen Rechnungen die Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} M(i,i') + S_a(i,i') &= \Pi_a(i,i') + \tfrac{fn}{n}S_0(i,i') + 3\Upsilon(i,i') + \Psi(i,i') \\ M_1'(i,i') + S_1'(i,i') &= \Pi_1'(i,i') \end{aligned}\right\} \quad (24)$$

deren zweite der bei der Berechnung der Coefficienten der ersten Ordnung abgeleiteten Bedingungsgleichung völlig ähnlich ist.

## 65.

Nehmen wir hierauf den Ausdruck des Art. 63 für $\frac{dds}{dt}$ wieder vor, und multipliciren denselben mit $1-e\cos\varepsilon$. Setzen wir demzufolge

$$R(i,i') = M(i,i') - \tfrac{e}{2}M(i+1,i') - \tfrac{e}{2}M(i-1,i')$$
$$R'(i,i') = M'(i,i') - \tfrac{e}{2}M'(i+1,i') - \tfrac{e}{2}M'(i-1,i')$$

so wird

$$n\frac{dds}{d\varepsilon} = \Sigma R(i,i',c)\cos(i,i') + \Sigma R(i,i',s)\sin(i,i')$$
$$+\varepsilon\Sigma R_1'(i,i',c)\cos(i,i') + \varepsilon\Sigma R_1'(i,i',s)\sin(i,i')$$

und durch Anwendung der folgenden Ausdrücke

Digitized by Google

$$R_1(i,i') = \frac{R(i,i')}{i-i'\mu}\,;\quad R_1'(i,i') = \frac{R'(i,i')}{i-i'\mu}$$

$$R_n(i,i',c) = R_1(i,i',c) + \frac{R'_1(i,i',s)}{i-i'\mu}$$

$$R_n(i,i',s) = R_1(i,i',c) - \frac{R'_1(i,i',c)}{i-i'\mu}$$

ergiebt sich

$$\begin{aligned} n\delta z = {} & \Sigma R_n(i,i',c)\sin(i,i') - \Sigma R_n(i,i',s)\cos(i,i') \\ & + \varepsilon\Sigma R_1'(i,i',c)\sin(i,i') - \varepsilon\Sigma R_1'(i,i',s)\cos(i,i') \end{aligned}$$

womit die Störungen der Länge und des Radius erlangt sind.

## 66.

Die Integration der Breitenstörungen wird auf ganz ähnliche Weise ausgeführt, und ist noch etwas einfacher. Das Differential von $\delta_1 R_0$, so wie es im vor. § für unser Beispiel berechnet worden ist, stelle ich wie folgt dar,

$$\begin{aligned} \frac{1}{\cos i}\frac{d\delta_1 R_0}{d\varepsilon} = {} & \Sigma T(i,i',s)\cos(i,i') && - \Sigma T(i,i',c)\sin(i,i') \\ & + \Sigma U(i,i',s)\cos(-\eta+(i,i')) && - \Sigma U(i,i',c)\sin(-\eta+(i,i')) \\ & + \Sigma V(i,i',s)\cos(\eta+(i,i')) && - \Sigma V(i,i',c)\sin(\eta+(i,i')) \\ & + \varepsilon\Sigma T(i,i',s)\cos(i,i') && - \varepsilon\Sigma T(i,i',c)\sin(i,i') \\ & + \varepsilon\Sigma U(i,i',s)\cos(-\eta+(i,i')) && - \varepsilon\Sigma U(i,i',c)\sin(-\eta+(i,i')) \\ & + \varepsilon\Sigma V(i,i',s)\cos(\eta+(i,i')) && - \varepsilon\Sigma V(i,i',c)\sin(\eta+(i,i')) \end{aligned}$$

Setzt man hier dem Vorhergehenden analog

$$T_1(i,i') = \frac{T(i,i')}{i-i'\mu}\,;\ U_1(i,i') = \frac{U(i,i')}{i-i'\mu}\,;\ V_1(i,i') = \frac{V(i,i')}{i-i'\mu}$$

$$T_1'(i,i') = \frac{T'(i,i')}{i-i'\mu}\,;\ U_1'(i,i') = \frac{U'(i,i')}{i-i'\mu}\,;\ V_1'(i,i') = \frac{U'(i,i')}{i-i'\mu}$$

$$T_n(i,i',s) = T_1(i,i',s) - \frac{T'_1(i,i',c)}{i-i'\mu}$$

$$U_n(i,i',s) = U_1(i,i',s) - \frac{U'_1(i,i',c)}{i-i'\mu}$$

$$V_n(i,i',s) = V_1(i,i',s) - \frac{V'_1(i,i',c)}{i-i'\mu}$$

$$T_n(i,i',c) = T_1(i,i',c) + \frac{T'_1(i,i',s)}{i-i'\mu}$$

$$U_n(i,i',c) = U_1(i,i',c) + \frac{U'_1(i,i',s)}{i-i'\mu}$$

$$V_n(i,i',c) = V_1(i,i',c) + \frac{V'_1(i,i',s)}{i-i'\mu}$$

so erhält man

Digitized by Google

$$\begin{aligned}\frac{\delta_1 R_0}{\cos i} = {} & \Sigma T_n(i,i',s)\sin(i,i') && + \Sigma T_n(i,i',c)\cos(i,i') \\ & + \Sigma U_n(i,i',s)\sin(-\eta+(i,i')) && + \Sigma U_n(i,i',c)\cos(-\eta+(i,i')) \\ & + \Sigma V_n(i,i',s)\sin(\eta+(i,i')) && + \Sigma V_n(i,i',c)\cos(\eta+(i,i')) \\ & + \varepsilon\Sigma T_1'(i,i',s)\sin(i,i') && + \varepsilon\Sigma T_1'(i,i',c)\cos(i,i') \\ & + \varepsilon\Sigma U_1'(i,i',s)\sin(-\eta+(i,i')) && + \varepsilon\Sigma U_1'(i,i',c)\cos(-\eta+(i,i')) \\ & + \varepsilon\Sigma V_1'(i,i',s)\sin(\eta+(i,i')) && + \varepsilon\Sigma V_1'(i,i',c)\cos(\eta+(i,i'))\end{aligned}$$

Sei ferner

$$\begin{aligned}\frac{1}{\cos i}\left(\frac{\partial R_0}{d\eta}\right)\frac{an\beta_2}{r} = {} & \Sigma Y(i,i',s)\sin(i,i') + \Sigma Y(i,i',c)\cos(i,i') \\ & + \varepsilon\Sigma Y(i,i',s)\sin(i,i') + \varepsilon\Sigma Y(i,i',c)\cos(i,i')\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}W(i,i') &= T_n(i,i') + U_n(i+1,i') + V_n(i-1,i') + Y(i,i') \\ W(i,i') &= T_1'(i,i') + U_1'(i+1,i') + V_1'(i-1,i') + Y_1'(i,i')\end{aligned}$$

dann wird

$$\begin{aligned}\frac{\delta_1 u}{\cos i} = {} & \Sigma W(i,i',s)\sin(i,i') + \Sigma W(i,i',c)\cos(i,i') \\ & + \varepsilon\Sigma W(i,i',s)\sin(i,i') + \varepsilon\Sigma W(i,i',c)\cos(i,i')\end{aligned}$$

womit der Hauptheil der Breitenstörungen zweiter Ordnung gegeben ist. Ueber den zweiten Theil dieser Störungen, nemlich über $\delta_2 u$, wird weiter unten das Nöthige gesagt werden.

## 67.

Gehen wir jetzt zu den Gliedern über, die von $i'=0$ abhängen und von welchen einige hier gleichwie in der ersten Annäherung auf besondere Formen führen. Lassen wir hier, wie dort schon geschah, zur Vereinfachung in der Bezeichnung der Coefficienten den zweiten Index, welcher immer Null ist, weg, so wird

$$\begin{aligned}\frac{d\delta W_0}{d\varepsilon} = {} & && F(0.s) \\ & - G(1.c)\sin(-\eta+\varepsilon) && + G(1.s)\cos(-\eta+\varepsilon) \\ & - F(1.c)\sin\varepsilon && + F(1.s)\cos\varepsilon \\ & - G(2.c)\sin(-\eta+2\varepsilon) && + G(2.s)\cos(-\eta+2\varepsilon) \\ & - H(0.c)\sin\eta && + H(0.s)\cos\eta \\ & - F(2.c)\sin 2\varepsilon && + F(2.s)\cos 2\varepsilon \\ & - G(3.c)\sin(-\eta+3\varepsilon) && + G(3.s)\cos(-\eta+3\varepsilon) \\ & - H(1.c)\sin(\eta+\varepsilon) && + H(1.s)\cos(\eta+\varepsilon) \\ & + \text{etc.} && + \text{etc.}\end{aligned}$$

Digitized by Google

$$
\begin{array}{ll}
 & +F'(0.s)\varepsilon \\
-G'(1.c)\varepsilon\sin(-\eta+\varepsilon) & +G'(1.s)\varepsilon\cos(-\eta+\varepsilon) \\
-F'(1.c)\varepsilon\sin\varepsilon & +F'(1.s)\varepsilon\cos\varepsilon \\
-G'(2.c)\varepsilon\sin(-\eta+2\varepsilon) & +G'(2.s)\varepsilon\cos(-\eta+2\varepsilon) \\
-H'(0.c)\varepsilon\sin\eta & +H'(0.s)\varepsilon\cos\eta \\
-F'(2.c)\varepsilon\sin 2\varepsilon & +F'(2.s)\varepsilon\cos 2\varepsilon \\
-G'(3.c)\varepsilon\sin(-\eta+3\varepsilon) & +G'(3.s)\varepsilon\cos(-\eta+3\varepsilon) \\
-H'(1.c)\varepsilon\sin(\eta+\varepsilon) & +H'(1.s)\varepsilon\cos(\eta+\varepsilon) \\
-\text{etc.} & +\text{etc.}
\end{array}
$$

Unter den Coefficienten $F(0.s)$ und $F'(0.s)$ soll hier der einfache Werth derselben verstanden werden, welcher auch in den bez. Tafeln des vor. § für unser Beispiel angesetzt worden ist. Macht man nun dem Vorhergehenden analog, aber mit Ausnahme des Werthes $i=0$,

$$
\begin{array}{l}
F_1(i) = \frac{4}{i}F(i);\ G_1(i) = \frac{4}{i}G(i);\ H_1(i) = \frac{4}{i}H(i) \\
F'_1(i) = \frac{4}{i}F'(i);\ G'_1(i) = \frac{4}{i}G'(i);\ H'_1(i) = \frac{4}{i}H'_1(i) \\
F_n(i,c) = F_1(i.c) + \frac{4}{i}F'_1(i,s) \\
G_n(i,c) = G_1(i,c) + \frac{4}{i}G'_1(i,s) \\
H_n(i,c) = H_1(i,c) + \frac{4}{i}H'_1(i,s) \\
F_n(i,s) = F_1(i,s) - \frac{4}{i}F'_1(i,c) \\
G_n(i,s) = G_1(i,s) - \frac{4}{i}G'_1(i,c) \\
H_n(i,s) = H_1(i,s) - \frac{4}{i}H'_1(i,c)
\end{array}
$$

so wird

$$
\begin{array}{ll}
\delta W_0 = & G_n(1.c)\cos(-\eta+\varepsilon) + G_n(1.s)\sin(-\eta+\varepsilon) \\
 & +F_n(1.c)\cos\varepsilon + F_n(1.s)\sin\varepsilon \\
 & +G_n(2.c)\cos(-\eta+2\varepsilon) + G_n(2.s)\sin(-\eta+2\varepsilon) \\
 & +F'(2.c)\cos 2\varepsilon + F_n(2.s)\sin 2\varepsilon \\
 & +G_n(3.c)\cos(-\eta+3\varepsilon) + G_n(3.s)\sin(-\eta+3\varepsilon) \\
 & +H_n(1.c)\cos(\eta+\varepsilon) + H_n(1.s)\sin(\eta+\varepsilon) \\
 & +\text{etc.} + \text{etc.} \\
 & +F(0.s)\varepsilon \\
 & +G'_1(1.c)\varepsilon\cos(-\eta+\varepsilon) + G'_1(1.s)\varepsilon\sin(-\eta+\varepsilon)
\end{array}
$$

Digitized by Google

$$
\begin{array}{ll}
+ F_1'(1.c)\varepsilon\cos\varepsilon & + F_1'(1.s)\varepsilon\sin\varepsilon \\
+ G_1'(2.c)\varepsilon\cos(-\eta+2\varepsilon) & + G_1'(2.s)\varepsilon\sin(-\eta+2\varepsilon) \\
+ H(0.s)\varepsilon\cos\eta & - H(0.c)\varepsilon\sin\eta \\
+ F_1''(2.c)\varepsilon\cos 2\varepsilon & + F_1''(2.s)\varepsilon\sin 2\varepsilon \\
+ G_1''(3.c)\varepsilon\cos(-\eta+3\varepsilon) & + G_1''(3.s)\varepsilon\sin(-\eta+3\varepsilon) \\
+ H_1''(1.c)\varepsilon\cos(\eta+\varepsilon) & + H_1''(1.s)\varepsilon\sin(\eta+\varepsilon) \\
+ \text{etc.} & + \text{etc.} \\
+ \tfrac{1}{2}F''(0.s)\varepsilon^2 & \\
+ \tfrac{1}{2}H''(0.s)\varepsilon^2\cos\eta & - \tfrac{1}{2}H''(0.c)\varepsilon^2\sin\eta
\end{array}
$$

68.

Setzen wir hierauf

$$
\begin{array}{ll}
P(0.c) = G_a(1.c) & \\
P(1.c) = F_a(1.c) + G_a(2.c) & \\
P(2.c) = F_a(2.c) + G_a(3.c) + H_a(1.c) & \\
\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} & \\
P(1.s) = F_a(1.s) + G_a(2.s) & \\
P(2.s) = F_a(2.s) + G_a(3.s) + H_a(1.s) & \\
\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} & \\
P'(0.c) = F(0.s) + G_1'(1.c) & \\
P'(1.c) = F_1'(1.c) + G_1'(2.c) + H(0.s) & \\
P'(2.c) = F_1'(2.c) + G_1'(3.c) + H_1'(1.c) & \\
\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} & \\
P'(1.s) = F_1'(1.s) + G_1'(2.s) - H(0.c) & \\
P'(2.s) = F_1'(2.s) + G_1'(3.s) + H_1'(1.s) & \\
\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} & \\
Q(1.c) = G_a(2.c) & \\
Q(2.c) = G_a(3.c) - H_a(1.c) & \\
\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} & \\
Q(0.s) = G_a(1.s) & \\
Q(1.s) = G_a(2.s) & \\
Q(2.s) = G_a(3.s) - H_a(1.s) & \\
\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} & \\
Q'(1.c) = G_1'(2.c) - H(0.s) & \\
Q'(2.c) = G_1'(3.c) - H_1'(1.c) & \\
\text{etc.} \qquad\qquad \text{etc.} &
\end{array}
$$

Digitized by Google

$$\begin{aligned} Q'(0.s) &= G'_1(1.s) \\ Q'(1.s) &= G'_1(2.s) + H(0.c) \\ Q'(2.s) &= G'_1(3.s) - H'_1(1.s) \\ \text{etc.} & \qquad \text{etc.} \end{aligned}$$

so wird

$$\begin{aligned} \overline{\delta W_0} = \quad & P(0.c) \\ & + P(1.c)\cos\varepsilon \quad + P(1.s)\sin\varepsilon \\ & + P(2.c)\cos 2\varepsilon \quad + P(2.s)\sin 2\varepsilon \\ & + \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.} \\ & + P'(0.c)\varepsilon \\ & + P'(1.c)\varepsilon\cos\varepsilon \quad + P'(1.s)\varepsilon\sin\varepsilon \\ & + P'(2.c)\varepsilon\cos 2\varepsilon \quad + P'(2.s)\varepsilon\sin 2\varepsilon \\ & + \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.} \\ & + \tfrac{1}{2}F''(0.s)\varepsilon^2 \\ & + \tfrac{1}{2}H'(0.s)\varepsilon^2\cos\varepsilon - \tfrac{1}{2}H(0.c)\varepsilon^2\sin\varepsilon \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\overline{\delta W_0}}{d\eta}\right) = \quad & \qquad\qquad - Q(0.s) \\ & + Q(1.c)\sin\varepsilon \quad - Q(1.s)\cos\varepsilon \\ & + Q(2.c)\sin 2\varepsilon \quad - Q(2.s)\cos 2\varepsilon \\ & + \text{etc.} \qquad\qquad - \text{etc.} \\ & \qquad\qquad - Q'(0.s)\varepsilon \\ & + Q'(1.c)\varepsilon\sin\varepsilon \quad - Q'(1.s)\varepsilon\cos\varepsilon \\ & + Q'(2.c)\varepsilon\sin 2\varepsilon \quad - Q'(2.s)\varepsilon\cos\varepsilon \\ & + \text{etc.} \qquad\qquad - \text{etc.} \\ & - \tfrac{1}{2}H'(0.s)\varepsilon^2\sin\varepsilon - \tfrac{1}{2}H'(0.c)\varepsilon^2\cos\varepsilon \end{aligned}$$

Setzt man ferner

$$\begin{aligned} \left(\frac{d\overline{W_0}}{d\eta}\right)\frac{an\partial z}{r} + \nu^2 = \quad & J(0.c) \\ & + J(1.c)\ \cos\ + J(1.s)\ \sin\varepsilon \\ & + \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.} \\ & + J'(0.c)\varepsilon \\ & + J'(1.c)\varepsilon\cos\varepsilon + J'(1.s)\varepsilon\sin\varepsilon \\ & + \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.} \\ & + J''(0.c)\varepsilon^2 \\ & + J''(1.c)\varepsilon^2\cos\varepsilon + J''(1.s)\varepsilon^2\sin\varepsilon \\ & + \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.} \end{aligned}$$

Digitized by Google

$$\left(\frac{d^2W_0}{d\eta^2}\right)\frac{\partial z}{r}-\left(\frac{dW_0}{d\eta}\right)\frac{\partial z}{r}\cdot\frac{ae\sin\varepsilon}{r}=$$

$$\begin{array}{ll} & -K(0.s)\\ +K(1.c)\cos\varepsilon & -K(1.s)\sin\varepsilon\\ +\text{etc.} & -\text{etc.}\\ & -K'(0.s)\varepsilon\\ +K'(1.c)\varepsilon\cos\varepsilon & -K'(1.s)\varepsilon\sin\varepsilon\\ +\text{etc.} & -\text{etc.}\\ +K''(1.c)\varepsilon^2\cos\varepsilon & -K''(1.s)\varepsilon^2\sin\varepsilon\\ +\text{etc.} & -\text{etc.}\end{array}$$

wo in Folge des im Art. 32 bewiesenen Satzes das $\varepsilon^2$ proportionale Glied der letzten Function Null gesetzt worden ist, und setzt man hierauf

$$\begin{array}{lll} M(i) & = & P(i)+J(i)\\ M'(i) & = & P'(i)+J'(i), \text{ ausgenommen } M'(0.c)\\ M''(1.c) & = & \tfrac{1}{2}H(0.s)+J''(1.c)\\ M''(2.c) & = & J''(2.c)\\ \text{etc.} & & \text{etc.}\\ M''(1.s) & = & -\tfrac{1}{2}H(0.c)+J''(1.s)\\ M''(2.s) & = & J''(2.s)\\ \text{etc.} & & \text{etc.}\end{array}$$

und

$$\begin{array}{lll} N(i) & = & Q(i)+K(i)\\ N'(i) & = & Q'(i)+K'(i)\\ N''(1.c) & = & -\tfrac{1}{2}H(0.s)+K''(1.c)\\ N''(2.c) & = & K''(2.c)\\ \text{etc.} & & \text{etc.}\\ N''(1.s) & = & \tfrac{1}{2}H(0.c)+K''(1.s)\\ N''(2.s) & = & K''(2.s)\\ \text{etc.} & & \text{etc.}\end{array}$$

so bekommt man

$$\begin{array}{ll} \frac{d\partial z}{dt} = & M(0.c)\\ & +M(1.c)\cos\varepsilon\ +M(1.s)\sin\varepsilon\\ & +M(2.c)\cos 2\varepsilon\ +M(2.s)\sin 2\varepsilon\\ & +\text{etc.}\qquad\quad +\text{etc.}\end{array}$$

Digitized by Google

$$
\begin{array}{ll}
+ M'(0.c)\varepsilon & \\
+ M'(1.c)\varepsilon\cos\varepsilon & + M'(1.s)\varepsilon\sin\varepsilon \\
+ M'(2.c)\varepsilon\cos 2\varepsilon & + M'(2.s)\varepsilon\sin 2\varepsilon \\
+ \text{etc.} & + \text{etc.} \\
+ M''(0.c)\varepsilon^2 & \\
+ M''(1.c)\varepsilon^2\cos\varepsilon & + M''(1.s)\varepsilon^2\sin\varepsilon \\
+ M''(2.c)\varepsilon^2\cos 2\varepsilon & + M''(2.s)\varepsilon^2\sin 2\varepsilon \\
+ \text{etc.} & - \text{etc.}
\end{array}
$$

wo noch die Zusammensetzung der Coefficienten $M'(0.c)$ und $M''(0.c)$ zu ermitteln ist, ferner wird

$$
\begin{array}{rll}
-2\frac{d\partial\gamma}{d\varepsilon} = & & -N(0.s) \\
& + N(1.c)\sin\varepsilon & - N(1.s)\cos\varepsilon \\
& + N(2.c)\sin 2\varepsilon & - N(2.s)\cos 2\varepsilon \\
& + \text{etc.} & - \text{etc.} \\
& & - N'(0.s)\varepsilon \\
& + N'(1.c)\varepsilon\sin\varepsilon & - N'(1.s)\varepsilon\cos\varepsilon \\
& + N'(2.c)\varepsilon\sin 2\varepsilon & - N'(2.s)\varepsilon\cos 2\varepsilon \\
& + \text{etc.} & - \text{etc.} \\
& + N''(1.c)\varepsilon^2\sin\varepsilon & - N''(1.s)\varepsilon^2\cos\varepsilon \\
& + N''(2.c)\varepsilon^2\sin 2\varepsilon & - N''(2.s)\varepsilon^2\cos 2\varepsilon \\
& + \text{etc.} & - \text{etc.}
\end{array}
$$

welche letztere sogleich integrirt werden kann.

## 69.

Setzt man

$$S_1(i) = \tfrac{1}{i}N(i);\ S_1'(i) = \tfrac{1}{i}N'(i);\ S_1''(i) = \tfrac{1}{i}N''(i)$$

mit der Ausnahme, dass

$$S_1(0) = 0;\ S_1'(0) = 0;\ S_1''(0.c) = \tfrac{1}{2}N'(0.s)$$

sein soll, ferner

$$
\begin{aligned}
S_u'(i,c) &= S_1'(i,c) + \tfrac{2}{i}S_u''(i,s) \\
S_u'(i,s) &= S_1'(i,s) - \tfrac{2}{i}S_1''(i,c) \\
S_u(i,c) &= S_1(i.c) + \tfrac{1}{i}S_u'(i,s) \\
S_u(i,s) &= S_1(i,s) - \tfrac{1}{i}S_1'(i,c)
\end{aligned}
$$

ausgenommen $S_u'(0.c) = N(0.s)$;

Digitized by Google

so wird

$$\begin{aligned}
2\delta\nu = {} & S_u(1.c)\cos\varepsilon && + S_u(1.s)\sin\varepsilon \\
& + S_u(2.c)\cos 2\varepsilon && + S_u(2.s)\sin 2\varepsilon \\
& + \text{etc.} && + \text{etc.} \\
& + S'_u(0.c)\varepsilon \\
& + S'_u(1.c)\varepsilon\cos\varepsilon && + S'_u(1.s)\varepsilon\sin\varepsilon \\
& + S'_u(2.c)\varepsilon\cos 2\varepsilon && + S'_u(2.s)\varepsilon\sin 2\varepsilon \\
& + \text{etc.} && + \text{etc.} \\
& + S''_u(0.c)\varepsilon^2 \\
& + S''_1(1.c)\varepsilon^2\cos\varepsilon && + S''_1(1.s)\varepsilon^2\sin\varepsilon \\
& + S''_1(2.c)\varepsilon^2\cos 2\varepsilon && + S''_1(2.s)\varepsilon^2\sin 2\varepsilon \\
& + \text{etc.} && + \text{etc.}
\end{aligned}$$

wo nur noch ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen die Verwandlung von $\varepsilon$ in $nt$ zu bewirken ist, die zuletzt vorgenommen werden soll.

## 70.

Ehe wir weiter gehen können, muss untersucht werden, welche Bedingungen die im §. 7 (II) entwickelten Sätze zwischen den Coefficienten von $\frac{dds}{dt}$ einführen. Es müssen die Ausdrücke von $M'(0.c)$ und $M''(0.c)$ demgemäss bestimmt, und in denselben die Grössen eliminirt werden, die einander strenge aufheben müssen, damit nicht die unvermeidlichen Fehler der letzten Decimalen der numerischen Rechnung diese Coefficienten unrichtig machen.

Wenn man $\delta W_0$ auf die Form

$$\Xi + T\left(\cos\eta + \tfrac{e}{2}\right) + \Psi\sin\eta$$

bringt, und in der Function

$$\Xi + \left(\frac{dW_0}{d\eta}\right)\frac{ands}{r} + \nu^2$$

die den Theil von $\frac{dds}{dt}$ ausmacht, welcher im §. 7 (II) in Betracht gezogen worden ist, $\varepsilon$ ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen durch die Gleichungen

$$\begin{aligned}
\varepsilon &= nt + e\sin\varepsilon \\
\varepsilon^2 &= n^2t^2 + 2ent\sin\varepsilon + e^2\sin^2\varepsilon
\end{aligned}$$

eliminirt, so muss zufolge des fünften Satzes in der so entstehenden Function der Coefficient von $nt$ sich zu dem von $nt\cos\varepsilon$, und der Coefficient von $n^2t^2$ sich zu dem von $n^2t^2\cos\varepsilon$ wie $\frac{e}{2}$ zu 1 verhalten.

Digitized by Google

Aus dem Ausdruck für $\delta W_0$ des Art. 67 findet man leicht mit Weglassung der Glieder, die hier auf keinen Fall gebraucht werden,

$$\begin{aligned}\Xi = & \left\{ F'(0.s) - \tfrac{e}{2} H(0.s) \right\} \varepsilon \\ & + \left\{ F_1'(1.c) - \tfrac{e}{2} G_1'(1.c) - \tfrac{e}{2} H_1(1.c) \right\} \varepsilon \cos \varepsilon \\ & + \left\{ F_1'(2.c) - \tfrac{e}{2} G_1'(2.c) - \tfrac{e}{2} H_1(2.c) \right\} \varepsilon \cos 2\varepsilon \\ & + \text{ etc.} \\ & + \left\{ \tfrac{1}{2} F'(0.s) - \tfrac{e}{4} H'(0.s) \right\} \varepsilon^2\end{aligned}$$

wo man ohne Weiteres $nt$ für $\varepsilon$ und $n^2 f^2$ für $\varepsilon^2$ setzen darf. Ferner ist aus dem Vorhergehenden mit bloser Rücksicht auf die Glieder, die hier in Betracht kommen,

$$\begin{aligned}\left(\frac{dW_2}{d\eta}\right)\frac{\alpha n \delta z}{r} + \nu^2 = & J'(0.c)\varepsilon \quad + J'(1.c)\varepsilon\cos\varepsilon \\ & + J''(0.c)\varepsilon^2 \quad + J''(1.c)\varepsilon^2\cos\varepsilon + J''(1.s)\varepsilon^2\sin\varepsilon + J''(2.c)\varepsilon^2\sin 2\varepsilon \\ = & \{J''(0.c) \quad + eJ''(1.s)\}nt \quad + \{J'(1.c) + eJ''(2.s)\}nt\cos\varepsilon \\ & + J'(0.c)n^2t^2 + J''(1.c)n^2t^2\cos\varepsilon\end{aligned}$$

nach der Elimination von $\varepsilon$ und $\varepsilon^2$. In Folge des angeführten Satzes bekommen wir also die Bedingungsgleichungen

$$(25)\quad \begin{cases} 0 = F(0.s) - \frac{e}{2} H(0.s) + J'(0.c) + eJ''(1.s) \\ \quad - \frac{e}{4} F'(1.c) + \frac{e^2}{4} G'(1.c) + \frac{e^2}{4} H'(1.c) - \frac{e}{2} J'(1.c) - \frac{e^2}{2} J''(2.s) \\ 0 = F'(0.s) - \frac{e}{2} H'(0.s) + 2J''(0.c) - eJ''(1.c) \end{cases}$$

Zufolge der Auseinandersetzungen des Art. 68 bekommen wir zuerst für $M'(0.c)$ und $M''(0.c)$ die folgenden Ausdrücke

$$\begin{aligned} M'(0.c) &= P'(0.c) + J'(0.c) \\ M''(0.c) &= \tfrac{1}{2} F'(0.c) + J''(0.c) \end{aligned}$$

oder wenn wir den Ausdruck

$$P'(0.c) = F(0.s) + G_1'(1.c)$$

substituiren

$$M'(0.c) = F(0.s) + G_1'(1.c) + J'(0.c)$$

Eliminiren wir aus diesen Ausdrücken $F(0.s)$ und $F'(0.s)$ durch die Gleichungen (25), so ergiebt sich

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} M'(0.c) = \quad & G'(1.c) + \tfrac{e}{2} H(0.s) \\ & + \tfrac{e}{2} F'(1.c) - \tfrac{e^2}{4} G'(1.c) - \tfrac{e^2}{4} H'(1.c) \\ & + \tfrac{e}{2} J'(1.c) - e\ J'(1.s) + \tfrac{e^2}{2} J'(2.s) \\ M''(0.c) = \quad & \tfrac{e}{4} H'(0.s) + \tfrac{e}{2} J''(1.c) \end{aligned}\right\} \quad (26)$$

wonach diese Coefficienten mit Sicherheit numerisch berechnet werden können.

## 71.

Um die Bedingungsgleichung des §. 3 auch auf die Glieder, welche hier entwickelt worden sind, anwenden zu können, sei

$$\begin{aligned} \frac{d\delta\frac{h_0}{h}}{d\varepsilon} = \quad & \Pi(0.s) \\ & - \Pi(1.c)\sin\varepsilon + \Pi(1.s)\cos\varepsilon \\ & - \text{etc.} \qquad + \text{etc.} \\ & \qquad + \Pi'(0.s)\,\varepsilon \\ & - \Pi'(1.c)\varepsilon\sin\varepsilon + \Pi'(1.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon \\ & - \text{etc.} \qquad + \text{etc.} \end{aligned}$$

Setzt man hier

$$\Pi_1(i) = \tfrac{1}{i}\Pi(i);\ \Pi_1'(i) = \tfrac{1}{i}\Pi'(i)$$

ausgenommen

$$\Pi_1(0) = 0;\ \Pi_1'(0) = 0$$

ferner

$$\Pi_a(1.c) = \Pi_1(1.c) + \tfrac{1}{i}\Pi_1'(1.s)$$

$$\Pi_a(1.s) = \Pi_1(1.s) - \tfrac{1}{i}\Pi_1'(1.c)$$

so wird

$$\begin{aligned} \delta\tfrac{h_0}{h} = \quad & \Pi_a(1.c)\cos\varepsilon \quad + \Pi_a(1.s)\sin\varepsilon \\ & + \Pi_a(2.c)\cos 2\varepsilon \quad + \Pi_a(2.s)\sin 2\varepsilon \\ & + \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.} \\ & + \Pi(0.s)\,\varepsilon \\ & + \Pi_1'(1.c)\varepsilon\cos\varepsilon \quad + \Pi_1'(1.s)\varepsilon\sin\varepsilon \\ & + \Pi_1'(2.c)\varepsilon\cos 2\varepsilon \quad + \Pi_1'(2.s)\varepsilon\sin 2\varepsilon \\ & + \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.} \\ & + \tfrac{1}{2}\Pi'(0.s)\,\varepsilon^2 \end{aligned}$$



Digitized by Google

Bezeichnen wir nun die bez. Coefficienten von $\nu^2$ und $2\nu\vartheta\frac{h}{h_0}$ ebenso wie im Art. 64 und nehmen in ähnlicher Bezeichnung aus der der ersten Annäherung

$$\begin{aligned}
2\nu = \quad & S_0(1.c)\cos\varepsilon \quad + S_0(1.s)\sin\varepsilon \\
& + S_0(2.c)\cos 2\varepsilon + S_0(2.s)\sin 2\varepsilon \\
& + \text{etc.} \qquad\qquad + \text{etc.} \\
& + S_0'(0.c)\,\varepsilon \\
& + S_0'(1.c)\,\varepsilon\cos\varepsilon \quad + S_0'(1.s)\,\varepsilon\sin\varepsilon
\end{aligned}$$

dann entstehen vermöge der im Art. 64 angeführten Bedingungsgleichung die folgenden

$$M(i) + S_u(i) = \Pi_u(i) + \tfrac{\Delta n}{n} S_0(i) + 3\,\Upsilon(i) + \Psi(i)$$

wo der Werth $i=0$ ausgeschlossen werden muss. Ferner

$$M'(0.c) + N(0.s) = \Pi(0.s) + \tfrac{\Delta n}{n} S_0'(0.c) + 3\,\Upsilon'(0.c) + \Psi'(0.c)$$

$$M'(1.c) + S_u'(1.c) = \Pi_r'(1.c) + \tfrac{\Delta n}{n} S_0'(1.c) + 3\,\Upsilon'(1.c) + \Psi'(1.c)$$

$$M'(1.s) + S_u'(1.s) = \Pi_r'(1.s) + \tfrac{\Delta n}{n} S_0'(1.s) + 3\,\Upsilon'(1.s) + \Psi'(1.s)$$

und für grössere Werthe von $i$ allgemein

$$M'(i) + S_u'(i) = \Pi_r'(i) + 3\,\Upsilon'(i) + \Psi'(i)$$

ferner

$$\begin{aligned}
& M''(0.c) + \tfrac{1}{2}N'(0.s) = \tfrac{1}{2}\Pi'(0.s) + 3\,\Upsilon''(0.c) + \Psi''(0.c) \\
& M''(1.c) + S_r'(1.c) = 3\,\Upsilon''(1.c) + \Psi''(1.c) \\
& M''(2.c) + S_r''(2.c) = 3\,\Upsilon''(2.c) \\
& M''(3.c) + S_r''(3.c) = 0 \\
& \qquad \text{etc.} \\
& M''(1.s) + S_r''(1.s) = 3\,\Upsilon''(1.s) + \Psi''(1.s) \\
& M''(2.s) + S_r''(2.s) = 3\,\Upsilon''(2.s) \\
& M''(3.s) + S_r''(3.s) = 0 \\
& \qquad \text{etc.}
\end{aligned}$$

Von der Gleichung zwischen den constanten Gliedern, die hier, gleichwie im §. 3 weggelassen worden ist, wird weiter unten die Rede sein.

Digitized by Google

## 72.

Nachdem man sich durch die im Vorhergehenden entwickelten Bedingungsgleichungen von der richtigen Ausführung der numerischen Rechnungen überzeugt hat, kann man zum Integral, welches $n\delta z$ giebt, übergehen. Für die hier zu betrachtenden Glieder desselben setze man

$$R(0.c) = M(0.c) - \tfrac{e}{2} M(1.c)$$
$$R(1.c) = M(1.c) - \tfrac{e}{2} M(2.c) - e\,M(0.c)$$
$$R(1.s) = M(1.s) - \tfrac{e}{2} M(2.s)$$

und für grössere Werthe von $i$ allgemein

$$R(i) = M(i) - \tfrac{e}{2} M(i+1) - \tfrac{e}{2} M(i-1)$$

ferner

$$R'(0.c) = M'(0.c) - \tfrac{e}{2} M'(1.c)$$
$$R'(1.c) = M'(1.c) - \tfrac{e}{2} M'(2.c) - e\,M'(0.c)$$
$$R'(1.s) = M'(1.s) - \tfrac{e}{2} M'(2.s)$$

und für grössere Werthe von $i$ allgemein

$$R'(i) = M'(i) - \tfrac{e}{2} M'(i+1) - \tfrac{e}{2} M'(i-1)$$

ferner

$$R''(0.c) = M''(0.c) - \tfrac{e}{2} M''(1.c) = 0$$
$$R''(1.c) = M''(1.c) - \tfrac{e}{2} M''(2.c) - e\,M''(0.c)$$
$$R''(1.s) = M''(1.s) - \tfrac{e}{2} M''(2.s)$$

und für grössere Werthe von $i$ wieder allgemein

$$R''(i) = M''(i) - \tfrac{e}{2} M''(i+1) - \tfrac{e}{2} M''(i-1)$$

dann sind diese $R$ Coefficienten die Coefficienten von $n\frac{dd\,z}{dc}$, und für die Integration des Ausdrucks dieser Function ist zu berechnen,

$$R_1(i) = \tfrac{1}{i} R(i)\,;\; R_1'(i) = \tfrac{1}{i} R'(i)\,;\; R_1''(i) = \tfrac{1}{i} R''(i)$$

ausgenommen

$$R_1(0) = 0\,;\; R_1'(0) = 0\,;\; R_1''(0.c) = \tfrac{1}{2} R'(0.c)$$

ferner



Digitized by Google

$$R_n'(i,c) = R_1(i,c) + \tfrac{2}{i} R_1''(i,s)$$

$$R_n'(i,s) = R_1(i,s) - \tfrac{2}{i} R_1''(i,c)$$

$$R_n(i,c) = R_1(i,c) + \tfrac{1}{i} R_n'(i,s)$$

$$R_n(i,s) = R_1(i,s) - \tfrac{1}{i} R_n'(i,c)$$

ausgenommen

$$R_n(0) = 0\,;\ R_n'(0.c) = R(0.c)$$

worauf

$$\begin{aligned} n\delta z = \quad & R_n(1.c)\sin\varepsilon && - R_n(1.s)\cos\varepsilon \\ & + R_n(2.c)\sin 2\varepsilon && - R_n(2.s)\cos 2\varepsilon \\ & + \text{etc.} && - \text{etc.} \\ & + R_n'(0.c)\,\varepsilon \\ & + R_n'(1.c)\,\varepsilon\sin\varepsilon && - R_n'(1.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon \\ & + R_n'(2.c)\,\varepsilon\sin 2\varepsilon && - R_n'(2.s)\,\varepsilon\cos 2\varepsilon \\ & + \text{etc.} && - \text{etc.} \\ & + R_1''(0.c)\,\varepsilon^2 \\ & + R_1''(1.c)\,\varepsilon^2\sin\varepsilon && - R_1''(1.s)\,\varepsilon^2\cos\varepsilon \\ & + R_1''(2.c)\,\varepsilon^2\sin 2\varepsilon && - R_1''(2.s)\,\varepsilon^2\cos 2\varepsilon \\ & + \text{etc.} && - \text{etc.} \end{aligned}$$

wird. Die Grösse $R_1''(0.c)$ ist der Coefficient der Säcularänderung der mittleren Länge, da blos das Glied $R_1''(0.c)\,\varepsilon^2$ des vorstehenden Ausdrucks ein dem Quadrat der Zeit proportionales Glied geben kann. Substituiren wir im Ausdruck für diesen Coefficienten die im Vorhergehenden enthaltenen Ausdrücke für $M'(0.c)$ und $M'(1.c)$, so ergiebt sich

$$(27)\qquad \begin{cases} R_1''(0.c) = \tfrac{1}{2}\,G'(1.c) - \tfrac{e^2}{8}\,G'(1.c) - \tfrac{e}{8}\,G'(2.c) \\ \qquad\qquad - \tfrac{e^2}{8}\,H'(1.c) - \tfrac{e}{2}\,J''(1.s) + \tfrac{e^2}{4}\,J''(2.s) \end{cases}$$

wodurch der Coefficient der Säcularänderung der mittleren Länge auf die Coefficienten von $\frac{d\delta W_0}{d\varepsilon}$ und von $\left(\frac{d W^0}{d\eta}\right)\frac{a n d z}{r} + \nu^2$ herbeigeführt ist. Das Hauptglied dieses Ausdrucks ist jedenfalls $\frac{1}{2}G'(1.c)$, und somit der Hälfte des Coefficienten von $\varepsilon\sin(\eta - \varepsilon)$ im Ausdrucke von $\frac{d\delta W_0}{d\varepsilon}$ gleich, wie schon am Ende des §. 7 (II) angeführt wurde.

Digitized by Google

## 73.

Für die Breitenstörungen, die von $i' = 0$ abhängen, sei

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\cos i}\frac{d\delta_1 R_0}{d\varepsilon} = \quad & T(0.s) \\
& + U(1.s)\cos(-\eta+\varepsilon) && - U(1.c)\sin(-\eta+\varepsilon) \\
& + T(1.s)\cos\varepsilon && - T(1.c)\sin\varepsilon \\
& + U(2.s)\cos(-\eta+2\varepsilon) && - U(2.c)\sin(-\eta+2\varepsilon) \\
& + V(0.s)\cos\eta && - V(0.c)\sin\eta \\
& + \text{etc.} && - \text{etc.} \\
& + T'(0.s)\,\varepsilon \\
& + U'(1.s)\,\varepsilon\cos(-\eta+\varepsilon) && - U'(1.c)\,\varepsilon\cos(-\eta+\varepsilon) \\
& + T'(1.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon && - T'(1.c)\,\varepsilon\sin\varepsilon \\
& + U'(2.s)\,\varepsilon\cos(-\eta+2\varepsilon) && - U'(2.c)\,\varepsilon\sin(-\eta+2\varepsilon) \\
& + V'(0.s)\,\varepsilon\cos\eta && - V'(0.c)\,\varepsilon\sin\eta \\
& + \text{etc.} && - \text{etc.}
\end{aligned}$$

Setzt man hier

$$T_1(i) = \tfrac{1}{i}T(i);\ U_1(i) = \tfrac{1}{i}U(i);\ V_1(i) = \tfrac{1}{i}V(i)$$
$$T_1'(i) = \tfrac{1}{i}T'(i);\ U_1'(i) = \tfrac{1}{i}U'(i);\ V_1'(i) = \tfrac{1}{i}V'(i)$$

ausgenommen

$$T_1(0) = 0,\ U_1(0) = 0,\ V_1(0) = 0;\ \text{etc.}$$

ferner

$$T_n(i,s) = T_1(i,s) - \tfrac{1}{i}T_1'(i,c)$$
$$U_n(i,s) = U_1(i,s) - \tfrac{1}{i}U_1'(i,c)$$
$$V_n(i,s) = V_1(i,s) - \tfrac{1}{i}V_1'(i,c)$$
$$T_n(i,c) = T_1(i,c) + \tfrac{1}{i}T_1'(i,s)$$
$$U_n(i,c) = U_1(i,c) + \tfrac{1}{i}U_1'(i,s)$$
$$V_n(i,c) = V_1(i,c) + \tfrac{1}{i}V_1'(i,s)$$

ausgenommen

$$T_n(0) = U_n(0) = 0$$

so wird

Digitized by Google

$$\frac{\delta_1 R_0}{\cos i} = \begin{aligned}
&+ U_n(1.s)\sin(-\eta+\varepsilon) && + U_n(1.c)\cos(-\eta+\varepsilon)\\
&+ T_n(1.s)\sin\varepsilon && + T_n(1.c)\cos\varepsilon\\
&+ U_n(1.s)\sin(-\eta+2\varepsilon) && + U_n(1.c)\cos(-\eta+2\varepsilon)\\
&+ T_n(2.s)\sin 2\varepsilon && + T_n(2.c)\cos 2\varepsilon\\
&+ U_n(3.s)\sin(-\eta+3\varepsilon) && + U_n(3.c)\cos(-\eta+3\varepsilon)\\
&+ V_n(1.s)\sin(\eta+\varepsilon) && + V_n(1.c)\cos(\eta+\varepsilon)\\
&+ \text{etc.} && + \text{etc.}\\
& && + T(0.s)\,\varepsilon\\
&+ U_1'(1.s)\varepsilon\sin(-\eta+\varepsilon) && + U_1'(1.c)\varepsilon\cos(-\eta+\varepsilon)\\
&+ T_1'(1.s)\varepsilon\sin\varepsilon && + T_1'(1.c)\varepsilon\cos\varepsilon\\
&+ U_1'(2.s)\varepsilon\sin(-\eta+2\varepsilon) && + U_1'(2.c)\varepsilon\cos(-\eta+2\varepsilon)\\
&- V(0.c)\varepsilon\sin\eta && + V(0.s)\varepsilon\cos\eta\\
&+ T_1'(2.s)\varepsilon\sin 2\varepsilon && + T_1'(2.c)\varepsilon\cos 2\varepsilon\\
&+ U_1'(3.s)\varepsilon\sin(-\eta+3\varepsilon) && + U_1'(3.c)\varepsilon\cos(-\eta+3\varepsilon)\\
&+ V_1'(1.s)\varepsilon\sin(\eta+\varepsilon) && + V_1'(1.c)\varepsilon\cos(\eta+\varepsilon)\\
&+ \text{etc.} && + \text{etc.}\\
& && + \tfrac{1}{2}T'(0.s)\,\varepsilon^2\\
&- \tfrac{1}{2}V'(0.c)\,\varepsilon^2\sin\eta && + \tfrac{1}{2}V'(0.s)\,\varepsilon^2\cos\eta
\end{aligned}$$

welcher dem Ausdruck des Art. 67 für $\partial W_0$ völlig ähnlich ist. Setzt man ferner

$$\frac{1}{\cos i}\left(\frac{dR_0}{d\eta}\right)\frac{an\partial z}{r} = \begin{aligned}
& && Y(0.c)\\
&+ Y(1.s)\sin\varepsilon && + Y(1.c)\cos\varepsilon\\
&+ \text{etc.} && + \text{etc.}\\
& && + Y'(0.c)\,\varepsilon\\
&+ Y'(1.s)\varepsilon\sin\varepsilon && + Y'(1.c)\,\varepsilon\cos\varepsilon\\
&+ \text{etc.} && + \text{etc.}\\
& && + Y''(0.c)\,\varepsilon^2\\
&+ Y''(1.s)\varepsilon^2\sin\varepsilon && + Y''(1.c)\,\varepsilon^2\cos\varepsilon\\
&+ \text{etc.} && + \text{etc.}
\end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned}
W(0.c) &= U_n(1.c) + Y(0.c)\\
W(1.s) &= T_n(1.s) + U_n(2.s) + Y(1.s)\\
W(1.c) &= T_n(1.c) + U_n(2.c) + Y(1.c)
\end{aligned}$$

und für grössere Werthe von $i$

$$W(i) = T_n(i) + U_n(i+1) + V_n(i-1) + Y(i)$$

ferner

$$W'(0.c) = T(0.s) + U_1'(1.c) + Y'(0.c)$$

Digitized by Google

und für grössere Werthe von $i$

$$W'(i) = T_1'(i) + U_1'(i+1) + V_1'(i-1) + Y'(i)$$

ferner

$$\begin{aligned}
W''(0.c) &= \tfrac{1}{2}T'(0.s) + Y''(0.c)\\
W''(1.c) &= \tfrac{1}{2}V'(0.s) + Y''(1.c)\\
W''(2.c) &= \qquad\qquad\quad Y''(2.c)\\
&\text{etc.} \qquad\qquad\quad \text{etc.}\\
W''(1.s) &= -\tfrac{1}{2}V'(0.c) + Y''(1.s)\\
W''(2.s) &= \qquad\qquad\quad Y''(2.s)\\
&\text{etc.} \qquad\qquad\quad \text{etc.}
\end{aligned}$$

so bekommt man

$$\begin{aligned}
\frac{\delta_1 u}{\cos i} = \quad & & W(0.c)\\
& + W(1.s)\sin\varepsilon & + W(1.c)\cos\varepsilon\\
& + W(2.s)\sin 2\varepsilon & + W(2.c)\cos 2\varepsilon\\
& + \text{etc.} & + \text{etc.}\\
& & + W'(0.c)\,\varepsilon\\
& + W'(1.s)\,\varepsilon\sin\varepsilon & + W'(1.c)\,\varepsilon\cos\varepsilon\\
& + W'(2.s)\,\varepsilon\sin 2\varepsilon & + W'(2.c)\,\varepsilon\cos 2\varepsilon\\
& + \text{etc.} & + \text{etc.}\\
& & + W''(0.c)\,\varepsilon^2\\
& + W''(1.s)\,\varepsilon^2\sin\varepsilon & + W''(1.c)\,\varepsilon^2\cos\varepsilon\\
& + W''(2.s)\,\varepsilon^2\sin 2\varepsilon & + W''(2.c)\,\varepsilon^2\cos 2\varepsilon\\
& + \text{etc.} & + \text{etc.}
\end{aligned}$$

womit der Haupttheil der Breitenstörungen erlangt ist.

## 74.

Es ist noch übrig, in den bisher entwickelten Ausdrücken von $\frac{d\delta z}{dt}$, $n\delta z$, $\delta v$ und $\delta_1 u$ den Bogen $\varepsilon$ ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen durch $nt$ zu eliminiren, wozu die schon in der ersten Annäherung angewandte Gleichung

$$\varepsilon = nt + \varepsilon\sin\varepsilon$$

dienen muss. Für die meisten Argumente ist indess das zweite Glied dieser Gleichung ohne merkliche Wirkung, und man darf ohne Weiteres $nt$ für $\varepsilon$ setzen, allein es kommen einige wenige Glieder vor, in welchen dieses Glied für nicht ganz unmerklich gehalten werden kann, und ich werde die verwandelten Formen daher vollständig hieher setzen. Nehmen wir zuerst den Fall $i' = 0$ aus, so findet man leicht

Digitized by Google

$$\frac{d\delta z}{dt} = \Sigma\Big\{M(i,i',c) - \frac{e}{2}M'(i-1,i',s) + \frac{e}{2}M'(i+1,i',s)\Big\}\cos(i,i') + \Sigma\Big\{M(i,i',c) + \frac{e}{2}M'(i-1,i'c) - \frac{e}{2}M'(i+1,i',c)\Big\}\sin(i,i')$$
$$+nt\,\Sigma M'(i,i',c)\cos(i,i') \qquad +nt\,\Sigma M'(i,i',s)\sin(i,i')$$

$$2\delta v = \Sigma\Big\{S_a(i,i',c) - \frac{e}{2}S_a'(i-1,i',s) + \frac{e}{2}S_a'(i+1,i',s)\Big\}\cos(i,i') + \Sigma\Big\{S_a(i,i',s) + \frac{e}{2}S_a'(i-1,i'c) - \frac{e}{2}S_a'(i+1,i',c)\Big\}\sin(i,i')$$
$$+nt\,\Sigma S_a'(i,i',c)\cos(i,i') \qquad +nt\,\Sigma S_a'(i,i',s)\sin(i,i')$$

$$n\delta z = \Sigma\Big\{R_a(i,i',c) - \frac{e}{2}R_a'(i-1,i',s) + \frac{e}{2}R_a'(i+1,i',s)\Big\}\sin(i,i') - \Sigma\Big\{R_a(i,i',s) + \frac{e}{2}R_a'(i-1,i',c) - \frac{e}{2}R_a'(i+1,i',c)\Big\}\cos(i,i')$$
$$+nt\,\Sigma R_a'(i,i',c)\sin(i,i') \qquad -nt\,\Sigma R_a'(i,i',s)\cos(i,i')$$

$$\frac{\delta_1 u}{\cos i} = \Sigma\Big\{W(i,i',s) + \frac{e}{2}W(i-1,i',c) - \frac{e}{2}W'(i+1,i',c)\Big\}\sin(i,i') + \Sigma\Big\{W(i,i',s) - \frac{e}{2}W'(i+1,i',c) + \frac{e}{2}W'(i+1,i',c)\Big\}\cos(i,i')$$
$$+nt\,\Sigma W'(i,i',s)\sin(i,i') \qquad +nt\,\Sigma W'(i,i',c)\cos(i,i')$$

Gehen wir hierauf zu den zu $i'=0$ gehörigen Gliedern über, so müssen wir der Vollständigkeit wegen auch die Gleichung

$$\varepsilon^2 = n^2t^2 + 2ent\sin\varepsilon + \frac{e^2}{2} - \frac{e^2}{2}\cos 2\varepsilon$$

berücksichtigen, obgleich man auch hier häufig mit der Substitution des ersten Gliedes ausreicht. Es wird hiemit

$$\frac{d\delta z}{dt} = \Big\{M(0.c) + \frac{e}{2}M'(1.s) + \frac{e^2}{2}M''(0.c) - \frac{e^2}{4}M''(2.c)\Big\}$$
$$+\Big\{M(1.c) + \frac{e}{2}M'(2.s) + \frac{e^2}{4}M''(1.c) - \frac{e^2}{4}M''(3.c)\Big\}\cos\varepsilon$$
$$+\Big\{M(1.s) + eM'(0.c) - \frac{e}{2}M'(2.c) + \frac{3e^2}{4}M''(1.s) + \frac{e^2}{4}M''(3.s)\Big\}\sin\varepsilon$$
$$+\Big\{M(2.c) - \frac{e}{2}M'(1.s) + \frac{e}{2}M'(3.s) - \frac{e^2}{2}M''(0.c) + \frac{e^2}{2}M''(2.c) - \frac{e^2}{4}M''(4.c)\Big\}\cos 2\varepsilon$$
$$+\Big\{M(2.s) + \frac{e}{2}M'(1.c) - \frac{e}{2}M'(3.c) + \frac{e^2}{2}M''(2.s) - \frac{e^2}{4}M''(4.s)\Big\}\sin 2\varepsilon$$
$$+\text{etc.} \qquad +\text{etc.}$$
$$+\{M'(0.c) + eM''(1.s)\}nt$$
$$+\{M'(1.c) + eM''(2.s)\}nt\cos\varepsilon + \{M'(1.s) + 2eM''(0.c) - eM''(2.c)\}nt\sin\varepsilon$$
$$+\{M'(2.c) - eM''(1.s) + eM''(3.s)\}nt\cos 2\varepsilon + \{M'(2.s) + eM''(1.c) - eM''(3.c)\}nt\sin 2\varepsilon$$
$$+\text{etc.} \qquad +\text{etc.}$$
$$+M''(0.c)n^2t^2$$
$$+M''(1.c)n^2t^2\cos\varepsilon + M''(1.s)n^2t^2\sin\varepsilon$$
$$+\text{etc.} \qquad +\text{etc.}$$

$$2\delta v = \Big\{S_a(1.c) + \frac{e}{2}S_a'(2.s) + \frac{e^2}{4}S_1''(1.c) - \frac{e^2}{4}S_1''(3.c)\Big\}\cos\varepsilon$$
$$+\Big\{S_a(1.s) + eS_a'(0.c) - \frac{e}{2}S_a'(2.c) + \frac{3e^2}{4}S_1''(1.s) - \frac{e^2}{4}S_1''(3.s)\Big\}\sin\varepsilon$$
$$+\Big\{S_a(2.c) - \frac{e}{2}S_1'(1.s) + \frac{e}{2}S_a'(3.s) + \frac{e^2}{2}S_1''(0.c) + \frac{e^2}{2}S_1''(2.c) - \frac{e^2}{4}S_1''(4.c)\Big\}\cos 2\varepsilon$$
$$+\Big\{S_a(1.c) + \frac{e}{2}S_a'(1.c) - \frac{e}{2}S_a'(3.c) + \frac{e^2}{2}S_1''(2.s) - \frac{e^2}{4}S_1''(4.s)\Big\}\sin 2\varepsilon$$
$$+\text{etc.} \qquad +\text{etc.}$$

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
&+\{S_u'(0.s)+eS_1''(1.s)\}nt\\
&+\{S_u'(1.c)+eS_1''(2.s)\}nt\cos\varepsilon+\{S_u'(1.s)+2eS_1''(0.c)-eS_1''(2.c)\}nt\sin\varepsilon\\
&+\{S_u'(2.c)-eS_1''(1.s)+eS_1''(3.s)\}nt\cos 2\varepsilon+\{S_u'(2.s)+eS_1''(1.c)+eS_1''(3.c)\}nt\sin 2\varepsilon\\
&+\text{etc.}\qquad\qquad +\text{etc.}\\
&+S_1''(0.s)n^2t^2\\
&+S_1''(1.c)n^2t^2\cos\varepsilon+S_1''(1.s)n^2t^2\sin\varepsilon\\
&+\text{etc.}\qquad +\text{etc.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
n\partial z=&\Big\{R_u'(1.c)+eR_u'(0.c)+\tfrac{e}{2}R_u'(2.s)+\tfrac{3e^2}{4}R_1''(1.c)-\tfrac{e^2}{4}R_1''(2.c)\Big\}\sin\varepsilon\\
&-\Big\{R_u'(1.s)-\tfrac{e}{2}R_u'(2.c)+\tfrac{e^2}{4}R_1''(1.s)-\tfrac{e^2}{4}R_1''(3.s)\Big\}\cos\varepsilon\\
&+\Big\{R_u'(2.c)-\tfrac{e}{2}R_u'(1.s)+\tfrac{e}{2}R_u'(3.s)+\tfrac{e^2}{2}R_1''(2.c)-\tfrac{e^2}{4}R_1''(4.c)\Big\}\sin 2\varepsilon\\
&-\Big\{R_u'(2.s)+\tfrac{e}{2}R_u'(1.c)-\tfrac{e}{2}R_u'(3.c)+\tfrac{e^2}{2}R_1''(0.c)+\tfrac{e^2}{2}R_1''(2.s)-\tfrac{e^2}{4}R_1''(4.s)\Big\}\cos 2\varepsilon\\
&+\text{etc.}\qquad\qquad +\text{etc.}\\
&\quad+\{R_u'(0.c)+eR_1''(1.c)\}nt\\
&\quad+\{R_u'(1.c)+2eR_1''(0.c)+eR_1''(2.s)\}nt\sin\varepsilon-\{R_u'(1.s)-eR_1''(2.c)\}nt\cos\varepsilon\\
&\quad+\{R_u'(2.c)-eR_1''(1.s)+eR_1''(3.s)\}nt\sin 2\varepsilon-\{R_u'(2.s)+eR_1''(1.c)-eR_1''(3.c)\}nt\cos 2\varepsilon\\
&\quad+\text{etc.}\qquad\qquad +\text{etc.}\\
&\quad+R_1''(0.e)n^2t^2\\
&\quad+R_1''(1.c)n^2t^2\sin\varepsilon\qquad\qquad -R_1''(1.s)n^2t^2\cos\varepsilon\\
&\quad+\text{etc.}\qquad\qquad -\text{etc.}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
\tfrac{\partial_1 u}{\cos i}=&\Big\{W(0.c)+\tfrac{e}{2}W'(1.s)+\tfrac{e^2}{2}W''(0.c)-\tfrac{e^2}{4}W''(2.c)\Big\}\\
&+\Big\{W(1.s)+eW'(0.c)-\tfrac{e}{2}W'(2.c)+\tfrac{3e^2}{4}W''(1.s)-\tfrac{e^2}{4}W''(3.s)\Big\}\sin\varepsilon\\
&+\Big\{W(1.c)+\tfrac{e}{2}W'(2.s)+\tfrac{e^2}{4}W''(1.c)-\tfrac{e^2}{4}W''(3.c)\Big\}\cos\varepsilon\\
&+\Big\{W(2.s)+\tfrac{e}{2}W'(1.c)-\tfrac{e}{2}W'(3.c)+\tfrac{e^2}{2}W''(2.s)-\tfrac{e^2}{4}W''(4.s)\Big\}\sin 2\varepsilon\\
&+\Big\{W(2.c)-\tfrac{e}{2}W'(1.s)+\tfrac{e}{2}W'(3.s)-\tfrac{e^2}{2}W''(0.c)+\tfrac{e^2}{2}W''(2.c)-\tfrac{e^2}{4}W''(4.c)\Big\}\cos 2\varepsilon\\
&+\text{etc.}\qquad\qquad +\text{etc.}\\
&\quad+\{W'(0.c)+eW''(1.s)\}nt\\
&+\{W'(1.s)+2eW''(0.c)-eW''(2.c)\}nt\sin\varepsilon\quad+\{W'(1.c)+eW''(2.s)\}nt\cos\varepsilon\\
&+\{W'(2.s)+eW''(1.c)-eW''(3.c)\}nt\sin 2\varepsilon+\{W'(2.c)-eW''(1.s)+eW''(3.s)\}nt\cos 2\varepsilon\\
&+\text{etc.}\qquad\qquad +\text{etc.}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad +W''(0.c)n^2t^2\\
&+W''(1.s)n^2t^2\sin\varepsilon\qquad\qquad +W''(1.c)n^2t^2\cos\varepsilon\\
&+\text{etc.}\qquad\qquad +\text{etc.}
\end{aligned}
$$

Digitized by Google

Ich bemerke, dass in diesen Ausdrücken von $2\delta\nu$ und $n\delta z$ die constanten Glieder weggeworfen werden mussten, weil die Gleichungen des §. 5 (II) für die Bestimmung der Constanten $C$ und $c$ auf diese Voraussetzung gegründet sind.

## 75.

Wenden wir uns jetzt zu dem zweiten Theil der Breitenstörungen und suchen, da im §. 8 (II) gezeigt worden ist, dass er sehr unbedeutend ausfällt, blos die Glieder, welche mit $t^2$ multiplicirt sind, da diese im Verlaufe der Zeit am schnellsten anwachsen können. Den im §. 8 (II) entwickelten Ausdruck für $\delta_2 u$, in welchem wir hier die Function $\Gamma$ weglassen können, da diese vermöge des im Art. 33 bewiesenen Satzes keine mit $t^2$ multiplicirten Glieder enthält, kann man leicht auf folgende Form bringen,

$$\delta_2 u = -\left\{\frac{u^2}{2\cos^2 i}\frac{\sin f}{\cos^2\varphi} + \frac{uu_1}{2\cos^2 i}\frac{\cos f}{\cos\varphi}\right\}\sin i\cos(\pi-\theta)$$
$$-\left\{\frac{u^2}{2\cos^2 i}\frac{\cos f+e}{\cos^2\varphi} - \frac{uu_1}{2\cos^2 i}\frac{\sin f}{\cos\varphi}\right\}\sin i\sin(\pi-\theta)$$

Führen wir hier die excentrische Anomalie an, so wird

$$d_2 u = -\left\{\frac{u^2}{2\cos^2 i}\frac{a\sin\varepsilon}{r} + \frac{uu_1}{2\cos^2 i}\frac{a(\cos\varepsilon-e)}{r}\right\}\sec\varphi\sin i\cos(\pi-\theta)$$
$$-\left\{\frac{u^2}{2\cos^2 i}\frac{a\cos\varepsilon}{r} - \frac{uu_1}{2\cos^2 i}\frac{a\sin\varepsilon}{r}\right\}\sin i\sin(\pi-\theta)$$

In der ersten Annäherung wurde gefunden, dass mit bloser Rücksicht auf die mit $t$ multiplicirten Glieder

$$\frac{u}{\cos i} = -eV_0(0.s)\,nt - V_0(0.c)\,nt\sin\varepsilon + V_0(0.s)\,nt\cos\varepsilon$$
$$\frac{u_1}{\cos i} = -V_0(0.c)\,nt\cos\varepsilon - V_0(0.s)\,nt\sin\varepsilon$$

ist, wo ich den Coefficienten die Null angehängt habe, um anzudeuten, dass sie der ersten Annäherung angehören, und nicht die der zweiten Annäherung sind, die im Vorhergehenden auch mit $V(0.s)$ und $V(0.c)$ bezeichnet wurden. Aus diesen Ausdrücken ergiebt sich leicht

$$\frac{u}{\cos i}\frac{a\sin\varepsilon}{r} + \frac{u_1}{\cos i}\frac{a(\cos\varepsilon-e)}{r} = -V_0(0.c)\,nt$$
$$\frac{u}{\cos i}\frac{a\cos\varepsilon}{r} - \frac{u_1}{\cos i}\frac{a\sin\varepsilon}{r} = V_0(0.s)\,nt$$

und hiemit wird der obige Ausdruck

Digitized by Google

$$\delta_2 u = -\left\{\tfrac{e}{2} V_0(0.c).V_0(0.s) + \tfrac{1}{4}(V_0(0.c))^2 \sin\varepsilon \right.$$
$$\left. - \tfrac{1}{2} V_0(0.c).V_0(0.s)\cos\varepsilon \right\} n^2 t^2 \sec\varphi \sin i \cos(\pi - \theta)$$
$$+\left\{\tfrac{e}{2}(V_0(0.s))^2 + \tfrac{1}{4} V_0(0.c).V_0(0.s)\sin\varepsilon \right.$$
$$\left. - \tfrac{1}{4}(V_0(0.s))^2 \cos\varepsilon \right\} n^2 t^2 \sin i \sin(\pi - \theta)$$

in welchem Ausdruck alle Glieder dieser Gattung vollständig enthalten sind.

76.

Die willkührlichen Constanten, die den im Vorhergehenden ermittelten Integralen hinzugefügt werden müssen, haben dieselbe Form wie die in der ersten Annäherung hinzugefügten, und werden, wie schon im §. 5 (II) erklärt ist, durch dieselben Gleichungen wie jene bestimmt. Aber sie nehmen andere Werthe wie jene an, und dienen überhaupt um die Werthe, die in der ersten Annäherung gefunden worden sind, zu berichtigen und zu ergänzen, gleichwie mit allen Coefficienten der zweiten Annäherung der Fall ist. Da keine Verwechselung entstehen kann, so will ich diese Constanten hier mit denselben Buchstaben bezeichnen wie dort, und es ist also den obigen Integralen noch hinzuzufügen

$$\frac{d\delta z}{dt} = k + k_1 \cos\varepsilon + k_2 \sin\varepsilon$$
$$n\delta z = c + \left(k - \tfrac{e}{2} k_1\right) nt + \left(1 - \tfrac{e^2}{2}\right) k_1 \sin\varepsilon - k_2 \cos\varepsilon$$
$$- \tfrac{e}{4} k_1 \sin 2\varepsilon + \tfrac{e}{4} k_2 \cos 2\varepsilon$$
$$2\delta\nu = 2C - k_1 \cos\varepsilon - k_2 \sin\varepsilon$$
$$\frac{u}{\cos i} = -el_1 + l\sin\varepsilon + l_1 \cos\varepsilon$$

Es wird jetzt das ganze der Zeit proportionale Glied in $n\delta z$

$$= \left\{R'_n(0.c) + eR''_1(1.c) + k - \tfrac{e}{2} k_1\right\} nt$$

und der Coefficient von $t$ in diesem Gliede enthält die Grössen zweiter Ordnung des Unterschiedes zwischen dem wahren und dem osculirenden Werth der mittleren Bewegung während der Zeiteinheit.

Die bei der Entwickelung der Bedingungsgleichung im §. 3, und bei der Anwendung derselben im Art. 71 weggelassene Gleichung zwischen den constanten Gliedern dient um die von dem Quadrat der störenden Kräfte abhängigen Glieder der Constante $C$ zu bestimmen. In Bezug auf diese Glieder ist die im Art. 51 (II) eingeführte und mit $Z_1$

Digitized by Google

bezeichnete Grösse dem constanten Gliede des Ausdrucks für $\frac{dds}{dt}$ des Art. 74 gleich, und es wird also mit Weglassung der kleinen, aus den mit $\varepsilon^2$ multiplicirten Gliedern entstehenden, Glieder, die nie merklich werden können,

$$Z_1 = M(0.c) + \tfrac{e}{2} M(1.s) \tag{28}$$

und die dort $V_1$ genannte Grösse ist hier, wo die Cuben und höheren Potenzen der störenden Kräfte nicht berücksichtigt worden,

$$\begin{aligned} V_1 = 3 \Big\{ &T(0.c) + \tfrac{e}{2} T'(1.s) \Big\} \\ &+ \Big\{ \Psi(0.c) + \tfrac{e}{2} \Psi'(1.s) \Big\} \end{aligned} \tag{29}$$

wo wie oben die $T$ und $\Psi$ Coefficienten die der Entwickelung von $r^2$ und $2r\delta\frac{h}{h_0}$ sind, deren numerische Werthe für unser Beispiel sich schon im vor. § befinden. Die Grösse $H_1$, die auch a. a. O. eingeführt wurde, ist im Vorhergehenden nicht enthalten, setzen wir aber für den Ausdruck von $\delta\frac{h_0}{h}$, so wie ihn die erste Annäherung mit Weglassung der dem Integral hinzugefügten Constante gegeben hat,

$$\delta\tfrac{h_0}{h} = \Sigma H_0(i,i',c)\cos(i,i') + \Sigma H_0(i,i',s)\sin(i,i')$$

so wird

$$H_1 = K^2 + \tfrac{1}{2}\Sigma'\{(H_0(i,i',c))^2 + (H_0(i,i',s))^2\} \tag{30}$$

und hiemit sowie mit Zuziehung der für die zweite Annäherung zu bestimmenden Werthe von $k$ und $k_1$ wird zufolge (39) (II)

$$C = -\tfrac{1}{4}(4k + ek_1 + Z_1) + \tfrac{1}{4}(3V_1 + 2H_1)$$

Bei der Bestimmung der numerischen Werthe von $c$, $k$, $k_1$, $k_2$ durch die Gleichungen (41) und (42) (II) muss der numerische Werth von

$$\tfrac{1}{4}(3V_1 + 2H_1)$$

der dort $(\nu)_0$ genannten Grösse hinzugefügt, und der oben gegebene Werth von $Z_1$ statt $Z$ substituirt werden.

## 77.

Indem wir nun zur Anwendung der im Vorhergehenden entwickelten Ausdrücke auf unser Beispiel übergehen, müssen wir zuerst vermittelst der in den Artt. 62 und 67 entwickelten Formeln das im Art. 55 gegebene Differential von $\delta W_0$ integriren. Es ergiebt sich mit wenig Mühe

Digitized by Google

| $\delta W_0$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $i, i'$ | cos | sin | $i, i'$ | cos | sin |
| −1,1,0 | −0.02968 | +0.03579 | 1,−3 | +5.1791 | −3.4899 |
| 0,1,0 | +0.631 | +0.437 | | +0.1256 | −0.1071 |
| −1,2,0 | −0.141 | −0.096 | | −0.1900 | +0.1375 |
| 2,0 | +0.011 | −0.172 | 2,−3 | +0.819 | −0.037 |
| | −0.003 | +0.049 | | −0.167 | +0.006 |
| | −0.014 | +0.250 | | +14.918 | −0.521 |
| 3,0 | −0.006 | −0.029 | 3,−3 | −0.018 | −0.016 |
| | +0.001 | +0.008 | | −0.007 | 0.000 |
| | +0.011 | +0.037 | | +0.073 | +0.061 |
| −2,−1 | +0.017 | +0.003 | 4,−3 | +0.002 | +0.023 |
| | −0.063 | −0.008 | | +0.001 | +0.003 |
| | −0.014 | +0.001 | | −0.003 | −0.061 |
| −1,−1 | +0.299 | −0.088 | 5,−3 | +0.019 | −0.020 |
| | −0.662 | +0.182 | | −0.096 | +0.007 |
| | −0.075 | +0.023 | | −0.022 | +0.021 |
| 0,−1 | −1.368 | −0.871 | 1,−4 | +0.117 | +0.003 |
| | −0.504 | −0.298 | | +0.063 | +0.020 |
| | +0.128 | +0.086 | | −0.016 | +0.014 |
| 1,−1 | +0.028 | +0.178 | 2,−4 | +0.351 | +0.210 |
| | +0.008 | −0.031 | | −0.077 | −0.044 |
| | +0.014 | +0.313 | | +0.460 | +0.297 |
| 2,−1 | +0.136 | −0.342 | 3,−4 | −0.123 | −0.246 |
| | −0.033 | +0.088 | | +0.030 | +0.053 |
| | −0.312 | +0.707 | | +0.282 | +0.620 |
| 3,−1 | −0.093 | +0.014 | 4,−4 | +0.017 | −0.036 |
| | +0.027 | −0.004 | | −0.004 | +0.011 |
| | +0.117 | −0.022 | | −0.024 | +0.050 |
| −1,−2 | +0.002 | −0.019 | 5,−4 | −0.036 | +0.018 |
| | −0.009 | +0.122 | | +0.015 | −0.007 |
| | +0.001 | +0.009 | | +0.030 | −0.020 |
| 0,−2 | −0.043 | +0.118 | 6,−4 | −0.004 | −0.001 |
| | −0.104 | +0.155 | | +0.002 | 0.000 |
| | −0.009 | −0.044 | | +0.003 | +0.001 |
| 1,−2 | −0.653 | +2.640 | 1,−5 | +0.008 | +0.001 |
| | +0.077 | −0.247 | | +0.016 | +0.012 |
| | −0.184 | +0.773 | | −0.002 | +0.009 |
| 2,−2 | +0.094 | −0.059 | 2,−5 | +0.132 | +0.070 |
| | −0.018 | +0.009 | | −0.010 | −0.006 |
| | −0.389 | +0.211 | | +0.053 | +0.026 |
| 3,−2 | −0.077 | −0.008 | 3,−5 | −0.013 | +0.168 |
| | −0.001 | +0.001 | | +0.008 | −0.055 |
| | +0.212 | +0.028 | | −0.066 | −0.112 |
| 4,−2 | +0.027 | +0.052 | 4,−5 | −0.032 | +0.055 |
| | −0.008 | −0.022 | | −0.006 | −0.005 |
| | −0.031 | −0.050 | | +0.118 | −0.126 |
| 0,−3 | −0.067 | +0.025 | 5,−5 | −0.021 | +0.001 |
| | +1.302 | −0.333 | | +0.005 | 0.000 |
| | +0.007 | −0.006 | | +0.027 | −0.003 |

Digitized by Google

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 6, −5 | +0.0021 | +0.0016 | 4, −6 | +0.0141 | −0.0029 |
| | −0.008 | −0.007 | | −0.045 | +0.006 |
| | −0.023 | −0.016 | | −0.141 | +0.035 |
| 1, −6 | 0.000 | 0.000 | 5, −6 | +0.016 | −0.011 |
| | −0.020 | +0.002 | | +0.002 | +0.006 |
| | 0.000 | 0.000 | | −0.037 | −0.004 |
| 2, −6 | −0.0572 | −0.0572 | 6, −6 | +0.004 | +0.014 |
| | −0.0059 | +0.0011 | | −0.001 | −0.004 |
| | +0.0130 | +0.0038 | | −0.006 | −0.018 |
| 3, −6 | −0.029 | +0.044 | | | |
| | +0.040 | −0.015 | | | |
| | −0.056 | +0.017 | | | |

| | $\varepsilon$ cos | $\varepsilon$ sin | | $\varepsilon$ cos | $\varepsilon$ sin |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,0,0 | −1249 | | 1, −2 | +581 | +419 |
| −1,1,0 | −3.47 | +4.81 | | −48 | −34 |
| 0,1,0 | −3 | +46 | | +158 | +108 |
| −1,2,0 | +2.7 | −3 | 2, −2 | +73 | +93 |
| 1,0,0 | −38614 | +47589 | | −13 | −16 |
| 2,0 | +32 | −83 | | −310 | −405 |
| | −3 | +9 | 3, −2 | −11 | +4 |
| | −73 | +197 | | −1 | −8 |
| 3,0 | −5 | +3 | | +36 | +32 |
| | +1 | −1 | 0, −3 | +1 | +11 |
| | +7 | −5 | | +225 | +258 |
| −1, −1 | +33 | −29 | | −4 | −16 |
| | −270 | +227 | 1, −3 | −10.1 | −2436.1 |
| | +13 | −10 | | +15.5 | +10.9 |
| 0, −1 | +26 | −20 | | −20.6 | +135.7 |
| | −43 | +28 | 2, −3 | +69 | −156 |
| | −19 | +13 | | −10 | +27 |
| 1, −1 | −25 | +3 | | +1234 | −2252 |
| | +2 | +1 | 3, −3 | +40 | −54 |
| | −60 | +34 | | −8 | +11 |
| 2, −1 | +42 | −13 | | −81 | +120 |
| | −6 | +1 | 4, −3 | +9 | +6 |
| | −134 | +52 | | −5 | +1 |
| 0, −2 | +39 | +26 | | —— | −19 |
| | −224 | −138 | | | |
| | −54 | −35 | | | |

| | $\varepsilon^2$ cos | $\varepsilon^2$ sin |
|---|---|---|
| 0,0,0 | −0.47 | |
| 1,0,0 | −42.67 | −8.84 |

Hieraus, und durch die Formeln der Art. 62 und 68 wurden zuerst die $P$ und $Q$ Coefficienten gebildet, und dann durch Zuziehung der Tafeln des Art. 57 die $M$ und $N$ Coefficienten, aus welchen letzteren

Digitized by Google

durch die Formeln der Art. 63 und 69 die Störungen des Radius erhalten wurden. Zur Berechnung von $M'(0.c)$ und $M''(0.c)$ wurden die Ausdrücke (26) gebraucht. Hiemit ergab sich

| | $\frac{d\delta z}{dt}$ | | $2\delta r$ | |
|---|---|---|---|---|
| $i, i'$ | cos | sin | cos | sin |
| 0,0 | −3.0659 | | | |
| 1,0 | +1.080 | +1.503 | −0.692 | −1.322 |
| 2,0 | +0.776 | +3.595 | −0.310 | −1.544 |
| 3,0 | +0.006 | +0.061 | −0.014 | −0.067 |
| −2,−1 | −0.048 | +0.013 | +0.048 | −0.005 |
| −1,−1 | −1.238 | +0.289 | +1.052 | −0.259 |
| 0,−1 | −1.570 | −0.868 | +1.719 | +0.925 |
| 1,−1 | +0.324 | +0.679 | −0.445 | −0.816 |
| 2,−1 | −0.462 | +1.052 | +0.296 | −0.708 |
| 3,−1 | +0.093 | 0.000 | −0.051 | −0.003 |
| −1,−2 | −0.005 | +0.146 | +0.004 | −0.075 |
| 0,−2 | −0.139 | −0.431 | +0.101 | +0.698 |
| 1,−2 | −0.524 | +2.235 | +0.449 | −2.203 |
| 2,−2 | −1.324 | +0.269 | +0.840 | −0.207 |
| 3,−2 | −1.671 | −0.139 | +0.584 | +0.045 |
| 4,−2 | −0.049 | −0.040 | +0.039 | +0.018 |
| 0,−3 | +1.335 | −2.496 | −1.211 | +2.223 |
| 1,−3 | +2.9085 | −1.8060 | −2.928 | +1.252 |
| 2,−3 | +13.437 | −0.091 | −13.096 | +0.156 |
| 3,−3 | +3.294 | +2.811 | −1.294 | −1.157 |
| 4,−3 | +0.087 | +0.240 | −0.062 | −0.100 |
| 5,−3 | −0.013 | +0.020 | +0.004 | −0.011 |
| 0,−4 | +0.045 | +0.007 | −0.027 | −0.009 |
| 1,−4 | +0.075 | +0.047 | −0.033 | −0.043 |
| 2,−4 | +0.583 | +0.375 | −0.615 | −0.405 |
| 3,−4 | +0.474 | +0.682 | −0.299 | −0.467 |
| 4,−4 | +0.017 | −0.039 | −0.002 | −0.002 |
| 5,−4 | +0.071 | −0.042 | −0.023 | +0.014 |
| 6,−4 | +0.001 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 1,−5 | +0.003 | +0.061 | +0.005 | −0.058 |
| 2,−5 | +0.154 | −0.079 | −0.198 | +0.186 |
| 3,−5 | −0.398 | −0.240 | +0.200 | +0.103 |
| 4,−5 | −1.043 | +0.708 | +0.373 | −0.231 |
| 5,−5 | −0.028 | +0.009 | +0.017 | −0.011 |
| 6,−5 | −0.023 | −0.024 | +0.008 | +0.007 |
| 1,−6 | −0.042 | −0.011 | +0.038 | +0.004 |
| 2,−6 | −0.0943 | +0.0321 | +0.134 | −0.074 |
| 3,−6 | −0.874 | +1.071 | +1.050 | −1.190 |
| 4,−6 | +1.276 | +0.021 | −0.438 | −0.048 |
| 5,−6 | +0.119 | +0.084 | −0.046 | −0.031 |
| 6,−6 | +0.001 | +0.003 | −0.002 | +0.001 |

Digitized by Google

| | $\varepsilon$ cos | $\varepsilon$ sin | $\varepsilon$ cos | $\varepsilon$ sin |
|---|---|---|---|---|
| 0,0 | −1645 | | +3565 | |
| 1,0 | −38717 | +47678 | +38679 | −47641 |
| 2,0 | −1481 | +1068 | +642 | −474 |
| 3,0 | −17 | +6 | +21 | −13 |
| −1,−1 | −228 | +204 | +218 | −194 |
| 0,−1 | −99 | +70 | +155 | −112 |
| 1,−1 | −98 | +49 | +108 | −66 |
| 2,−1 | −244 | +46 | +154 | −34 |
| 0,−2 | −368 | −225 | +436 | +265 |
| 1,−1 | +453 | +311 | −442 | −270 |
| 2,−2 | −352 | −554 | +299 | +435 |
| 3,−2 | −128 | −432 | +42 | +457 |
| 0,−3 | −288 | +15 | +244 | −77 |
| 1,−3 | +119.7 | −1677.4 | −350 | +1904 |
| 2,−3 | +989 | −2721 | −1015 | +2805 |
| 3,−3 | −406 | +1464 | +189 | −488 |
| 4,−3 | −56 | +44 | +21 | −21 |

| | $\varepsilon^2$ cos | $\varepsilon^2$ sin | $\varepsilon^2$ cos | $\varepsilon^2$ sin |
|---|---|---|---|---|
| 0,0 | −1.82 | | +4.47 | |
| 1,0 | −42.84 | −8.92 | +42.86 | +8.84 |
| 2,0 | −1.84 | −1.26 | +0.74 | +0.51 |
| 3,0 | −0.03 | −0.02 | +0.03 | +0.02 |

## 78.

Um die Bedingungsgleichung anzuwenden, wurde hierauf der im Art. 56 enthaltene Ausdruck des Differentials von $\delta \frac{h_0}{h}$ durch die Formeln der Artt. 64 und 71 integrirt, und darauf die Grösse $2\nu \frac{\Delta n}{n}$ durch den im Art. 35 angegebenen Werth von $\Delta n$ für unser Beispiel und durch die im Art. 59 (II) enthaltenen Glieder von $\nu$ berechnet. Hiemit fand sich

| | $\delta \frac{h_0}{h}$ | | $2\nu \frac{\Delta n}{n}$ | |
|---|---|---|---|---|
| $i, i'$ | cos | sin | cos | sin |
| 1,0 | −0".213 | −0".159 | +0".086 | +0".071 |
| 2,0 | +0.001 | +0.059 | | |
| 3,0 | +0.002 | +0.007 | | |
| −2,−1 | −0.012 | 0.000 | | |
| −1,−1 | −0.097 | +0.027 | +0.001 | +0.001 |
| 0,−1 | +0.445 | +0.285 | | |
| 1,−1 | +0.017 | −0.081 | +0.003 | −0.009 |
| 2,−1 | −0.019 | +0.121 | | |
| 3,−1 | +0.033 | −0.007 | | |

Digitized by Google

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| −1,−2 | +0.002 | +0.015 | | |
| 0,−2 | +0.020 | −0.052 | −0.001 | +0.001 |
| 1,−2 | +0.247 | −0.888 | −0.009 | +0.008 |
| 2,−2 | −0.035 | +0.021 | −0.024 | +0.017 |
| 3,−2 | +0.035 | +0.004 | | |
| 4,−2 | −0.008 | −0.015 | | |
| 0,−3 | +0.010 | −0.005 | +0.002 | −0.001 |
| 1,−3 | −2.166 | +1.179 | +0.010 | −0.004 |
| 2,−3 | −0.273 | +0.025 | +0.075 | 0.000 |
| 3,−3 | +0.003 | +0.005 | +0.003 | +0.002 |
| 4,−3 | +0.001 | −0.006 | | |
| 5,−3 | −0.006 | +0.008 | | |
| 1,−4 | −0.056 | −0.005 | | |
| 2,−4 | −0.130 | −0.094 | +0.002 | +0.001 |
| 3,−4 | +0.040 | +0.082 | +0.001 | +0.002 |
| 4,−4 | −0.008 | +0.015 | | |
| 5,−4 | +0.012 | −0.007 | | |
| 6,−4 | 0.000 | +0.001 | | |
| 1,−5 | −0.003 | −0.003 | | |
| 2,−5 | −0.035 | −0.035 | +0.001 | 0.000 |
| 3,−5 | −0.002 | −0.055 | 0.000 | +0.002 |
| 4,−5 | +0.050 | −0.046 | | |
| 5,−5 | +0.010 | +0.002 | | |
| 6,−5 | −0.006 | −0.006 | | |
| 1,−6 | 0.000 | 0.000 | | |
| 2,−6 | +0.023 | +0.018 | | |
| 3,−6 | +0.017 | −0.015 | 0.000 | −0.001 |
| 4,−6 | −0.047 | +0.008 | | |
| 5,−6 | −0.003 | +0.004 | | |
| 6,−6 | −0.002 | −0.006 | | |

| | ε cos | ε sin | ε cos | ε sin |
|---|---|---|---|---|
| 0,0 | +1492 | | 0 | |
| 1,0 | +5 | −19 | −9 | +28 |
| 2,0 | −10 | +28 | | |
| 3,0 | +2 | −1 | | |
| −1,−1 | −12 | +10 | | |
| 0,−1 | −6 | +6 | | |
| 1,−1 | +11 | −8 | | |
| 2,−1 | −16 | +5 | | |
| 0,−2 | −14 | −10 | | |
| 1,−2 | −178 | −125 | | |
| 2,−2 | −22 | −32 | | |
| 3,−2 | +4 | —— | | |
| 0,−3 | +1 | −9 | | |
| 1,−3 | −30 | +866 | | |
| 2,−3 | −17 | +48 | | |
| 3,−3 | −13 | +18 | | |
| 4,−3 | −2 | −3 | | |

| | $\varepsilon^2$ cos | |
|---|---|---|
| 0,0 | +1.35 | |



Digitized by Google

worauf die Glieder der Bedingungsgleichungen (24) und der des Art. 71 sich wie folgt ergaben

| | $M(i,i') + S_0(i,i')$ | | $H_0(i,i') +$ etc. | | Uebrigbleibende Fehler | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $i,i'$ | cos | sin | cos | sin | cos | sin |
| 1,0 | +0".388 | +0".181 | +0".367 | +0".187 | +0".021 | −0".006 |
| 2,0 | +0.466 | +2.054 | +0.463 | +2.050 | +0.003 | +0.004 |
| 3,0 | −0.008 | −0.006 | −0.005 | −0.008 | −0.003 | +0.002 |
| −2,−1 | 0.000 | +0.008 | −0.001 | +0.006 | +0.001 | +0.002 |
| −1,−1 | −0.186 | +0.030 | −0.189 | +0.029 | +0.003 | +0.001 |
| 0,−1 | +0.449 | +0.057 | +0.430 | +0.082 | +0.019 | −0.025 |
| 1,−1 | −0.124 | −0.137 | −0.126 | −0.136 | +0.002 | −0 001 |
| 2,−1 | −0.166 | +0.344 | −0.179 | +0.349 | +0.013 | −0.005 |
| 3,−1 | +0.042 | −0.003 | +0.039 | −0.004 | +0.003 | +0.001 |
| −1,−2 | −0.001 | +0.071 | +0.002 | +0.071 | −0.003 | 0.000 |
| 0,−2 | −0.038 | +0.267 | −0.047 | +0.280 | +0.009 | −0.013 |
| 1,−2 | −0.075 | +0.032 | −0.051 | +0.038 | −0.024 | −0.006 |
| 2,−2 | −0.484 | +0.062 | −0.477 | +0 070 | −0.007 | −0.008 |
| 3,−2 | −1.087 | −0.094 | −1.078 | −0.093 | −0.009 | −0.001 |
| 4,−2 | −0.010 | −0.022 | −0.008 | −0.015 | −0.002 | −0.007 |
| 0,−3 | +0.124 | −0.273 | +0.115 | −0.268 | +0.009 | −0.005 |
| 1,−3 | −0.049 | −0.554 | −0.014 | −0.559 | −0.005 | +0.005 |
| 2,−3 | +0.344 | +0.065 | +0.349 | +0.069 | −0.008 | −0.004 |
| 3,−3 | +1.997 | +1.654 | +1.989 | +1.649 | +0.008 | +0.005 |
| 4,−3 | +0.025 | +0.140 | +0.024 | +0.137 | +0.001 | +0.003 |
| 5,−3 | −0.009 | +0.009 | −0.006 | +0.008 | −0.003 | +0.001 |
| 0,−4 | +0.018 | −0.002 | +0.006 | −0.006 | +0.012 | +0.004 |
| 1,−4 | +0.042 | +0.001 | +0.022 | −0.016 | +0.020 | +0.020 |
| 2,−4 | −0.032 | −0.030 | −0.022 | −0.042 | −0.010 | +0.012 |
| 3,−4 | +0.175 | +0.215 | +0.166 | +0.205 | +0.009 | +0.010 |
| 4,−4 | +0.015 | −0.041 | +0.015 | −0.034 | 0.000 | −0.007 |
| 5,−4 | +0.048 | −0.028 | +0.046 | −0.028 | +0.002 | 0.000 |
| 6,−4 | +0.001 | 0.000 | 0.000 | +0.001 | +0.001 | −0.001 |
| 1,−5 | +0.008 | +0.003 | +0.007 | −0.003 | +0.001 | +0.006 |
| 2,−5 | −0.044 | +0.107 | −0.041 | +0.087 | −0.003 | +0.020 |
| 3,−5 | −0.198 | +0.463 | −0.200 | +0.473 | +0.002 | −0.010 |
| 4,−5 | −0.670 | +0.477 | −0.624 | +0.446 | −0.046 | −0.031 |
| 5,−5 | −0.011 | −0.002 | −0.006 | +0.001 | −0.005 | −0.003 |
| 6,−5 | −0.015 | −0.017 | −0.016 | −0.015 | +0.001 | −0.002 |
| 1,−6 | −0.004 | −0.007 | −0.003 | −0.003 | −0.001 | −0.004 |
| 2,−6 | +0.043 | −0.042 | +0.040 | −0.043 | +0.003 | +0.001 |
| 3,−6 | +0.176 | −0.119 | +0.186 | −0.107 | −0.010 | −0.012 |
| 4,−6 | +0.838 | −0.027 | +0.842 | −0.019 | −0.004 | −0.008 |
| 5,−6 | +0.073 | +0.053 | +0.072 | +0.055 | +0.001 | −0.002 |
| 6,−6 | −0.001 | +0.004 | −0.002 | −0.006 | +0.001 | +0 010 |

| | $\varepsilon$ cos | $\varepsilon$ sin | $\varepsilon$ cos | $\varepsilon$ sin | $\varepsilon$ cos | $\varepsilon$ sin |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | +1920 | | +1880 | | +40 | |
| 1,0 | −38 | −37 | −43 | +35 | +5 | +2 |
| 2,0 | −869 | +594 | −871 | +595 | +2 | −1 |
| 3,0 | +4 | −7 | +2 | −4 | +2 | −3 |

Digitized by Google

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| −1,−1 | −10 | +13 | −11 | +14 | +1 | −1 |
| 0,−1 | +56 | −42 | +51 | −40 | +5 | −2 |
| 1,−1 | +10 | −17 | +10 | −14 | 0 | −3 |
| 2,−1 | −90 | +12 | −97 | +8 | +7 | +4 |
| 0,−2 | +68 | +40 | +68 | +42 | 0 | −2 |
| 1,−2 | +41 | +41 | +45 | +38 | −4 | +3 |
| 2,−2 | −53 | −119 | −51 | −124 | −2 | +5 |
| 3,−2 | −86 | −275 | −86 | −275 | 0 | 0 |
| 0,−3 | −44 | −62 | −48 | −62 | +4 | 0 |
| 1,−3 | −230 | +227 | −234 | +229 | +4 | −2 |
| 2,−3 | −26 | +84 | −18 | +84 | −8 | 0 |
| 3,−3 | −217 | +676 | −217 | +677 | 0 | −1 |
| 4,−3 | −35 | +23 | −32 | +20 | −3 | +3 |

| | $\varepsilon^3$ cos | $\varepsilon^3$ sin | $\varepsilon^3$ cos | $\varepsilon^3$ sin | $\varepsilon^3$ cos | $\varepsilon^3$ sin |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | +2.65 | | +2.67 | | −0.02 | |
| 1,0 | +0.02 | −0.08 | +0.02 | −0.08 | 0.00 | 0.00 |
| 2,0 | −1.10 | −0.75 | −1.11 | −0.75 | +0.01 | 0.00 |
| 3,0 | 0.00 | 0.00 | 0 | 0 | 0.00 | 0.00 |

Diese Uebereinstimmung ist befriedigend, und man sieht daraus, wie genau man die Störungen zweiter Ordnung durch diese Methode berechnen kann, obgleich man genöthigt ist, viele der Coefficienten aus einer ziemlich grossen Anzahl von Gliedern zusammen zu setzen.

## 79.

Es muss noch gezeigt werden, wie weit die aus dem fünften Satze des §. 7 (II) entspringenden Bedingungsgleichungen, die hier durch die Gleichungen (25) ausgedrückt worden sind, in unserem Beispiel durch die numerische Rechnung erfüllt worden sind. Wenn wir blos die Theile von $F(0.s)$ und $H(0.s)$, die hier in Betracht kommen, aufnehmen, so ist aus der Tafel für das Differential von $\delta W_0$ des Art. 55

$F(0.s) = +0.00010$; $H(0.s) = -0.08982$

$F'(0.s) = -0.0000093$; $H'(0.s) = -0.0008534$

$F'(1.c) = -0.00003$; $G'(1.c) = -0.0000347$; $H'(1.c) = -0.00073$

und aus der Tafel des Art. 57

$J'(0.c) = -0.00396$; $J'(1.c) = -0.00103$

$J''(0.c) = -0.0000134$; $J''(1.c) = -0.0000017$

$J''(1.s) = -0.0000008$; $J''(2.s) = -0.0000126$



Digitized by Google

Hiemit werden die Glieder der Gleichungen der Reihe nach

$$
\begin{aligned}
F(0.s) &= +0''.00010 \\
-\tfrac{e}{2}H(0.s) &= +0.00381 \\
J'(0.c) &= -0.00396 \\
eJ''(1.s) &= 0.00000 \\
-\tfrac{e}{2}F'(1.c) &= 0.00000 \\
\tfrac{e^2}{4}G'(1.c) &= 0.00000 \qquad F'(0.s) = -0''.0000093 \\
\tfrac{e^2}{4}H'(1.c) &= 0.00000 \qquad -\tfrac{e}{2}H'(0.s) = +0.0000362 \\
-\tfrac{e}{2}J'(1.c) &= +0.00004 \qquad 2J''(0.c) = -0.0000268 \\
-\tfrac{e^2}{2}J''(2.s) &= 0.00000 \qquad -eJ''(1.c) = +0.0000001 \\
\text{Summe} &= -0''.00001 \qquad \text{Summe} = -0''.0000002
\end{aligned}
$$

welches eine sehr befriedigende Uebereinstimmung ist. Ich bemerke hiebei, dass die einzelnen Glieder dieser Bedingungsgleichungen bei ihrer Berechnung aus einer weit geringeren Anzahl von Gliedern zusammengesetzt sind, wie die Glieder der im Art. 55 für unser Beispiel untersuchten Bedingungsgleichung.

## 80.

Integrirt man nun den im Art. 77 enthaltenen Werth von $\frac{d\delta z}{dt}$ durch die Formeln der Artt. 65 und 72, so ergiebt sich

| $n\delta z$ | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $i, i'$ | sin | −cos | $i, i'$ | sin | −cos |
| 1,0 | +1.78 | +1.74 | −1,−2 | 0.00 | −0.40 |
| 2,0 | +0.36 | +1.77 | 0,−2 | +0.47 | +0.77 |
| 3,0 | −0.01 | 0.00 | 1,−2 | −1.49 | +7.35 |
| −2,−1 | 0.00 | 0.00 | 2,−2 | −0.95 | +0.14 |
| −1,−1 | +0.88 | −0.24 | 3,−2 | −0.70 | −0.06 |
| 0,−1 | +4.40 | +2.62 | 4,−2 | +0.01 | −0.01 |
| 1,−1 | +0.63 | +1.03 | 0,−3 | −1.16 | +2.32 |
| 2,−1 | −0.29 | +0.62 | 1,−3 | −57.79 | +36.90 |
| 3,−1 | +0.04 | −0.02 | 2,−3 | +13.77 | −0.15 |

Digitized by Google

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 3,−3 | +1".39 | +1".44 | 2,−5 | +0".66 | −0".28 |
| 4,−3 | −0.02 | +0.04 | 3,−5 | −0.29 | −0.21 |
| 5,−3 | 0.00 | 0.00 | 4,−5 | −0.45 | +0.32 |
| 0,−4 | −0.03 | 0.00 | 5,−5 | +0.01 | −0.01 |
| 1,−4 | −0.13 | −0.08 | 6,−5 | −0.01 | −0.01 |
| 2,−4 | +0.92 | +0.57 | 1,−6 | +0.03 | +0.01 |
| 3,−4 | +0.28 | +0.41 | 2,−6 | +0.58 | +0.14 |
| 4,−4 | 0.00 | −0.03 | 3,−6 | −1.02 | +1.02 |
| 5,−4 | +0.02 | −0.01 | 4,−6 | +0.69 | −0.01 |
| 1,−5 | +0.04 | −0.09 | 5,−6 | +0.02 | +0.03 |

| | $\varepsilon \sin$ | $-\varepsilon \cos$ | | $\varepsilon \sin$ | $-\varepsilon \cos$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | | +311170 | 0,−2 | +555 | +342 |
| 1,0 | −38532 | +47718 | 1,−2 | +1597 | +1138 |
| 2,0 | +81 | −478 | 2,−2 | −284 | −421 |
| 3,0 | +15 | −13 | 3,−2 | −49 | −177 |
| −1,−1 | +166 | −149 | 0,−3 | +281 | −82 |
| 0,−1 | +244 | −169 | 1,−3 | −1979 | +34391 |
| 1,−1 | −129 | +68 | 2,−3 | +1049 | −2828 |
| 2,−1 | −145 | +27 | 3,−3 | −228 | +654 |
| | | | 4,−3 | −13 | −2 |

| | $\varepsilon^2 \sin$ | $-\varepsilon^2 \cos$ |
|---|---|---|
| 0,0 | | +1.72 |
| 1,0 | −42.61 | −8.87 |
| 2,0 | −0.01 | −0.44 |
| 3,0 | +0.02 | +0.01 |

wo die Säcularänderung durch den Ausdruck (27) berechnet worden ist.

Für die Breitenstörungen erhalten wir aus den Zahlenangaben des Art. 59 durch Integration und Addition

| | $\frac{\partial_1 u}{\cos i}$ | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| $i, i'$ | sin | cos | $i, i'$ | sin | cos |
| 0,0 | | +0".47 | 2,−2 | −0".13 | +0".42 |
| 1,0 | −0".20 | −0.05 | 3,−2 | +0.04 | +0.07 |
| 2,0 | −0.27 | +0.13 | 0,−3 | −0.19 | +0.76 |
| −1,−1 | +0.06 | +0.16 | 1,−3 | −0.26 | +0.38 |
| 0,−1 | +0.01 | +0.08 | 2,−3 | +0.35 | +0.30 |
| 1,−1 | −0.44 | −0.18 | 3,−3 | −0.52 | −0.16 |
| 2,−1 | −0.07 | +0.02 | 4,−3 | −0.02 | 0.00 |
| 0,−2 | +0.39 | 0.00 | 3,−6 | −0.13 | +0.20 |
| 1,−2 | +0.01 | +0.08 | 4,−6 | −0.07 | −0.15 |

Digitized by Google

| | $\varepsilon$ sin | $\varepsilon$ cos | | $\varepsilon$ sin | $\varepsilon$ cos |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,0 | | +1028 | 0,−3 | +462 | +1456 |
| 1,0 | −2948 | +594 | 1,−3 | −1096 | −189 |
| 2,0 | −1307 | +1616 | 2,−3 | −98 | +1691 |
| 3,0 | −21 | +29 | 3,−3 | −1329 | +288 |
| | | | 4,−3 | −59 | +40 |

| | $\varepsilon^2$ sin | $\varepsilon^2$ cos |
|---|---|---|
| 0,0 | | +9.49 |
| 1,0 | −8.01 | −46.28 |
| 2,0 | +2.40 | +4.68 |
| 3,0 | +0.05 | +0.40 |

Die Integration des im Art. 60 angegebenen numerischen Werthes des Differentials von $I'$ giebt die grössten Glieder dieser Function wie folgt,

$$I'\cos i = +0''.00241\,nt - 0''.11\sin(1.3) + 0''.00\cos(1.3)$$

und durch die Substitution der numerischen Werthe in den Ausdruck des Art. 75 bekommt man

$$\delta_2 u = \left\{-0''.0000022 - 0''.0001502\sin\varepsilon + 0''.0000265\cos\varepsilon\right\}\varepsilon^2\sin i\cos(\pi-\theta)$$
$$+\left\{\ 0''.0000004 + 0''.0000265\sin\varepsilon - 0''.0000047\cos\varepsilon\right\}\varepsilon^2\sin i\sin(\pi-\theta)$$

Diese beiden Functionen sind also unbedeutend, wenn man die Ekliptik oder den Aequator als Fundamentalebene annimmt.

## 84.

Wir haben endlich noch die Correctionen zu betrachten, die aus der Verbesserung der Integrationsdivisoren entstehen, und wovon die grössten schon im Art. 62 (II) angegeben sind. Durch die Ausdrücke des Art. 56 (II) fand sich

| | $n\delta z$ | | $\frac{d\delta z}{dt}$ | | $2\delta v$ | | $\frac{u}{\cos i}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $i, i'$ | sin | − cos | cos | sin | cos | sin | sin | cos |
| 1,0 | 0 | 0 | 0 | 0 | −0''.09 | −0''.07 | | |
| 1,−2 | +0''.02 | −0''.02 | 0''.00 | 0''.00 | 0.00 | 0.00 | | |
| 2,−2 | −0.08 | +0.10 | −0.02 | +0.01 | +0.03 | −0.03 | | |
| 3,−2 | −0.11 | +0.08 | −0.10 | +0.07 | +0.12 | −0.08 | | |
| 0,−3 | +0.04 | −0.02 | −0.05 | +0.02 | +0.05 | −0.02 | +0''.02 | −0''.01 |
| 1,−3 | +2.69 | −3.10 | −0.13 | +0.07 | +0.21 | −0.09 | −0.01 | −0.02 |
| 2,−3 | −1.56 | 0.00 | −1.57 | 0.00 | +1.50 | 0.00 | +0.09 | +0.23 |
| 3,−3 | +0.05 | 0.00 | +0.01 | +0.01 | −0.01 | −0.01 | | |

Digitized by Google

Die numerischen Werthe der willkührlichen Constanten können erst weiter unten berechnet werden.

## §. 7. Berechnung der von den Producten der störenden Massen abhängigen Glieder.

### Bestimmung der numerischen Werthe der willkührlichen Constanten der zweiten Annäherung.

82.

Da die kleinen Planeten auf die andern keine merkliche Wirkung äussern, so entstehen hier die von den Producten der störenden Kräfte abhängigen Glieder aus den Störungen, die die störenden Planeten von den andern Planeten unsers Sonnensystems erleiden, und es sind zunächst die Säcularänderungen der Bahnen der störenden Planeten, und vorzugsweise die der Jupitersbahn in Betracht zu ziehen. Insoweit diese vom Saturn herrühren, entnehme ich sie den »Untersuchungen über die gegenseitigen Störungen des Jupiters und Saturns«, lasse aber die Breitenstörungen weg, die kleiner sind wie die übrigen und geringern Einfluss haben. Wenn man die dort gefundenen Werthe auf die Saturnsmasse $= \frac{1}{3512}$ reducirt, so wird

$$\begin{aligned} n'\partial z' = {} & 1''.02135\, n't \sin g' - 1''.13928\, n't \cos g' \\ & + 0.01228\, n't \sin 2g' - 0.01370\, n't \cos 2g' \\ & + 0.00029\, n't \sin 3g' - 0.00033\, n't \cos 3g' \\ \nu' = {} & - 0''.01229\, n't \\ & - 0.51068\, n't \cos g' - 0''.56965\, n't \sin g' \\ & - 0.01228\, n't \cos 2g' - 0.01370\, n't \sin 2g' \\ & - 0.00044\, n't \cos 3g' - 0.00050\, n't \sin 3g' \end{aligned}$$

Die von den übrigen Planeten herrührenden Glieder habe ich aus der Méc. cél. entnommen. Nach der Reduction auf die jetzt für die besten anerkannten Werthe der Massen, der Verwandelung in Sexagesimalsecunden und der Einführung von $n't$ statt $t$, fand sich

$$\begin{aligned} n'\partial z' = {} & + 0''.00245\, n't \sin g' - 0''.02744\, n't \cos g' \\ & + 0.00004\, n't \sin 2g' - 0.00032\, n't \cos 2g' \\ \nu' = {} & - 0''.00004\, n't \\ & - 0.00123\, n't \cos g' - 0''.01372\, n't \sin g' \\ & - 0.00004\, n't \cos 2g' - 0.00032\, n't \sin 2g' \end{aligned}$$

Digitized by Google

addirt man diese zu den vorstehenden, so wird im Ganzen

$$\begin{aligned} n'\delta z' = &+ 1''.02380\, n't \sin g' - 1''.16672\, n't \cos g' \\ &+ 0.01232\, n't \sin 2g' - 0.01402\, n't \cos 2g' \\ &+ 0.00029\, n't \sin 3g' - 0.00033\, n't \cos 3g' \\ \nu' = &- 0''.01233\, n't \\ &- 0.51191\, n't \cos g' - 0''.58337\, n't \sin g' \\ &- 0.01232\, n't \cos 2g' - 0.01402\, n't \sin 2g' \\ &- 0.00044\, n't \cos 3g' - 0.00050\, n't \sin 3g' \end{aligned}$$

wo noch $n't$ und $g'$ durch $\varepsilon$ zu eliminiren sind, um die im Vorhergehenden angewandte Form zu erhalten.

## 83.

Zufolge des Art. 74 (I) ist, da hier erlaubt ist die constanten Glieder wegzulassen,

$$n't = \mu\varepsilon - \mu e \sin\varepsilon$$

Da aber das Glied $-\mu e \sin\varepsilon$ Glieder anderer Form und noch dazu unbedeutende hervorbringen würde, so dürfen wir auch dieses weglassen und in den obigen Ausdrücken

$$n't = \mu\varepsilon$$

setzen. Ferner ist a. a. O. gefunden worden

$$\begin{aligned} z^{i-i'} = &J_{i'i}^{(0)} y^{-i'\mu} \pi^{-i'} + J_{i'i}^{(1)} y^{1-i'\mu} \pi^{-i'} + J_{i'i}^{(2)} y^{2-i'\mu} \pi^{-i'} + \ldots \\ &- J_{i'i}^{(1)} y^{-1-i'\mu} \pi^{-i'} + J_{i'i}^{(2)} y^{-2-i'\mu} \pi^{-i'} \mp \ldots \end{aligned}$$

wo $z'$ die zu $g'$, $y$ die zu $\varepsilon$, und $\pi$ die zu $c'-\mu c$ gehörige, imaginäre Exponentialfunction ist. Da die reciproke Gleichung

$$\begin{aligned} z^{i'} = &J_{i'i}^{(0)} y^{i'\mu} \pi^{i'} + J_{i'i}^{(1)} y^{-1+i'\mu} \pi^{i'} + J_{i'i}^{(2)} y^{-2+i'\mu} \pi^{i'} + \ldots \\ &- J_{i'i}^{(1)} y^{1+i'\mu} \pi^{i'} + J_{i'i}^{(2)} y^{2+i'\mu} \pi^{i'} \mp \ldots \end{aligned}$$

wird, so bekommen wir sogleich

$$\begin{aligned} \sin i'g' = &\pm \text{etc.} - J_{i'i}^{(2)} \sin(-2,i') + J_{i'i}^{(1)} \sin(-1,i') \\ &- J_{i'i}^{(0)} \sin(0,i') - J_{i'i}^{(1)} \sin(1,i') - J_{i'i}^{(2)} \sin(2,i') - \text{etc.} \\ \cos i'g' = &\mp \text{etc.} + J_{i'i}^{(2)} \cos(-2,i') - J_{i'i}^{(1)} \cos(-1,i') \\ &+ J_{i'i}^{(0)} \cos(0,i') + J_{i'i}^{(1)} \cos(1,i') + J_{i'i}^{(2)} \cos(2,i') + \text{etc.} \end{aligned}$$

Digitized by Google

wo wieder allgemein

$$(i,i) = (i - i'\mu)\varepsilon - i'(c' - c\mu)$$

gesetzt worden ist. Für unser Beispiel giebt der Art. 84 (I) die folgenden numerischen Werthe der $J$ Functionen

$$\log(J_1^{(0)} - 1) = 6{,}3398\,n;\quad \log J_1^{(1)} = 8.16987;\quad \log J_1^{(2)} = 6.0388;$$

$$\log(J_{21}^{(0)} - 1) = 6.9418\,n;\quad \log J_{22}^{(1)} = 8.47076;$$

u. s. w., durch deren Anwendung die im vor. Art. gefundenen Ausdrücke für $n'\delta z'$ und $\nu'$ in folgende übergehen,

$$\begin{aligned}
n'\delta z' = {} & -0''.00004\,\varepsilon \sin(-2,1) - 0''.00004\,\varepsilon \cos(-2,1)\\
& + 0.00528\,\varepsilon \sin(-1,1) + 0.00601\,\varepsilon \cos(-1,1)\\
& - 0.35670\,\varepsilon \sin(0,1) \quad - 0.40648\,\varepsilon \cos(0,1)\\
& - 0.00528\,\varepsilon \sin(1,1) \quad - 0.00601\,\varepsilon \cos(1,1)\\
& - 0.00004\,\varepsilon \sin(2,1) \quad - 0.00004\,\varepsilon \cos(2,1)\\
& + 0.00013\,\varepsilon \sin(-1,2) + 0.00014\,\varepsilon \cos(-1,2)\\
& - 0.00429\,\varepsilon \sin(0,2) \quad - 0.00489\,\varepsilon \cos(0,2)\\
& - 0.00013\,\varepsilon \sin(1,2) \quad - 0.00014\,\varepsilon \cos(1,2)\\
& - 0.00010\,\varepsilon \sin(0,3) \quad - 0.00012\,\varepsilon \cos(0,3)\\
\nu' = {} & -0''.00429\,\varepsilon\\
& - 0.00002\,\varepsilon \cos(-2,1) + 0''.00002\,\varepsilon \sin(-2,1)\\
& + 0.00264\,\varepsilon \cos(-1,1) - 0.00301\,\varepsilon \sin(-1,1)\\
& - 0.17835\,\varepsilon \cos(0,1) \quad + 0.20324\,\varepsilon \sin(0,1)\\
& - 0.00264\,\varepsilon \cos(1,1) \quad + 0.00301\,\varepsilon \sin(1,1)\\
& - 0.00002\,\varepsilon \cos(2,1) \quad + 0.00002\,\varepsilon \sin(2,1)\\
& + 0.00013\,\varepsilon \cos(-1,2) - 0.00014\,\varepsilon \sin(-1,2)\\
& - 0.00429\,\varepsilon \cos(0,2) \quad + 0.00489\,\varepsilon \sin(0,2)\\
& - 0.00013\,\varepsilon \cos(1,2) \quad + 0.00014\,\varepsilon \sin(1,2)\\
& - 0.00015\,\varepsilon \cos(0,3) \quad + 0.00018\,\varepsilon \sin(0,3)
\end{aligned}$$

die mit den Factoren $F$ und $G$ des Ausdrucks von $\frac{d\,\delta W_0}{ds}$ zu multipliciren sind, und von welchen die kleinsten der angeführten Glieder nichts Merkliches geben, und daher übergangen werden können.

## 84.

Den Coefficienten $F$ bekommt man nach Art. 46 (I) durch die Differentiation des Ausdrucks von $T$ nach $c'$, und $G$ durch Addition der Ausdrücke von $V$ nach $T$ und durch Umkehrung aller Zeichen. Mit wenig Mühe ergiebt sich daher für unser Beispiel

Digitized by Google

| | F | | G | |
|---|---|---|---|---|
| $i,i'$ | cos | sin | sin | − cos |
| 0,0,0 | 0 | | | −0″29 |
| −1,1,0 | 0 | 0 | −91″96 | +0.29 |
| 0,1,0 | 0 | 0 | +3.75 | +1.67 |
| −1,2,0 | 0 | 0 | +5.43 | +1.71 |
| 1,0,0 | 0 | 0 | −6.91 | −3.64 |
| 2,0 | 0 | 0 | +24.94 | +9.19 |
| | 0 | 0 | −1.48 | −0.61 |
| | 0 | 0 | −32.00 | −11.80 |
| −2,−1 | −0″83 | −0″13 | −4.03 | −0.77 |
| | +1.14 | +0.27 | +5.98 | +1.53 |
| | −0.05 | −0.13 | −0.75 | −0.72 |
| −1,−1 | +1.20 | +1.70 | +6.42 | +8.29 |
| | −2.29 | −3.24 | −12.79 | −17.17 |
| | +0.58 | +0.90 | +4.47 | +5.77 |
| 0,−1 | −0.42 | −1.09 | −1.85 | −4.74 |
| | −2.14 | −0.65 | −7.23 | −1.80 |
| | +2.95 | +2.74 | +10.82 | +10.94 |
| 1,−1 | +3.90 | +11.02 | +15.79 | +46.27 |
| | +1.34 | +4.55 | +6.04 | +20.03 |
| | −6.54 | −19.19 | −26.99 | −81.52 |
| 2,−1 | −1.87 | +1.20 | −5.08 | +4.66 |
| | +0.65 | −0.84 | +2.26 | −2.73 |
| | +1.84 | −1.06 | +4.37 | −4.88 |
| 3,−1 | +0.27 | −5.60 | +1.42 | −27.99 |
| | −0.06 | +1.25 | −0.29 | +4.79 |
| | −0.32 | +6.25 | −1.71 | +32.67 |
| −1,−2 | +0.04 | +1.01 | +0.27 | +2.44 |
| | +0.06 | −2.30 | −0.09 | −6.37 |
| | −0.18 | +1.04 | −0.47 | +3.37 |
| 0,−2 | +1.83 | −1.73 | +2.90 | −3.05 |
| | −5.14 | +5.90 | −11.24 | +14.02 |
| | +1.81 | −2.73 | +5.97 | −8.40 |
| 1,−2 | −27.91 | +23.39 | −44.27 | +39.08 |
| | +11.49 | −6.68 | +17.98 | −9.63 |
| | +31.10 | −28.37 | +49.81 | −48.84 |
| 2,−2 | +179.65 | −126.95 | +283.47 | −201.09 |
| | −54.72 | +38.72 | −81.18 | +58.07 |
| | −184.95 | +130.78 | −296.84 | +210.37 |
| 3,−2 | +8.73 | +0.24 | +18.37 | +0.20 |
| | −3.81 | +0.41 | −7.25 | −0.03 |
| | −6.52 | −1.76 | −15.75 | −1.67 |
| 4,−2 | −7.91 | +2.19 | −23.51 | +6.45 |
| | +1.97 | −0.54 | +5.26 | −1.47 |
| | +8.69 | −2.39 | +26.38 | −7.10 |
| 0,−3 | +0.24 | −0.46 | −0.13 | −0.60 |
| | −2.98 | +1.35 | −5.12 | +2.26 |
| | +2.50 | −0.54 | +5.35 | −1.49 |

Digitized by Google

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1, −3 | −7.44 | +4.21 | −6.42 | +4.31 |
| | +8.71 | +0.77 | +13.26 | +2.46 |
| | +3.89 | −6.42 | −1.36 | −8.24 |
| 2, −3 | +86.90 | −1.33 | +105.48 | +8.58 |
| | −28.96 | −1.65 | −34.47 | −5.75 |
| | −91.62 | −0.02 | −112.76 | −10.48 |
| 3, −3 | −154.57 | −118.76 | −213.80 | −162.98 |
| | +48.56 | +37.33 | +65.78 | +49.93 |
| | +158.23 | +120.65 | +220.03 | +166.97 |
| 4, −3 | −5.69 | −12.30 | −10.05 | −21.10 |
| | +2.37 | +4.64 | +3.45 | +7.50 |
| | +3.98 | +10.92 | +8.41 | +19.69 |
| 1, −4 | −0.98 | +1.64 | −0.19 | +2.43 |
| | +2.46 | +1.73 | +3.04 | +2.76 |
| | −0.59 | −3.79 | −2.26 | −6.00 |
| 2, −4 | +18.22 | +5.66 | +16.57 | +5.59 |
| | −6.03 | −7.00 | −5.53 | −9.67 |
| | −19.24 | −3.18 | −17.54 | −0.90 |
| 3, −4 | −32.27 | −87.93 | −32.34 | −103.10 |
| | +9.38 | +29.94 | +10.03 | +34.94 |
| | +32.40 | +91.31 | +31.47 | +107.71 |
| 4, −4 | −49.52 | +132.60 | −62.24 | +169.65 |
| | +15.90 | −42.30 | +19.55 | −53.64 |
| | +49.59 | −135.09 | +62.74 | −173.11 |
| 5, −4 | −9.97 | +10.60 | −15.23 | +16.51 |
| | +3.58 | −3.89 | +5.37 | −5.57 |
| | +9.39 | −9.20 | +14.63 | −15.24 |

wo mehr Glieder angesetzt sind, wie gebraucht werden.

85.

Die Multiplicationen wurden nun auf die im §. 5 erklärte Art und nach den dort gegebenen Formeln ausgeführt, wodurch sich ergab,

| | $Fn'\delta z'$ | | $Gv'$ | |
|---|---|---|---|---|
| $i, -i'$ | $-\varepsilon \sin$ | $\varepsilon \cos$ | $-\varepsilon \sin$ | $\varepsilon \cos$ |
| 0,0,0 | | +0.12 | | −0.26 |
| −1,1,0 | +0.15 | −0.24 | −0.45 | +0.53 |
| 0,1,0 | +1 | −1 | −1 | +3 |
| −1,2,0 | —— | —— | −1 | +1 |
| 1,0,0 | −1.28 | +2.82 | +2.66 | −6.26 |
| 1, −1 | +4 | +1 | −4 | —— |
| | −2 | —— | +1 | −1 |
| | −6 | −1 | +4 | —— |
| 2, −1 | −28 | −7 | +23 | +4 |
| | +9 | +2 | −7 | −1 |
| | +29 | +7 | −24 | −5 |

Digitized by Google

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1,−2 | +1 | +1 | +3 | +1 |
| | ——— | ——— | +1 | +1 |
| | −3 | −1 | −5 | −3 |
| 2,−2 | −7 | −9 | +5 | +6 |
| | +2 | +3 | −1 | −2 |
| | +8 | +9 | −5 | −6 |
| 3,−2 | +1 | +25 | −1 | −18 |
| | ——— | −8 | +1 | +5 |
| | −2 | −26 | +2 | +18 |
| 0,−3 | ——— | ——— | ——— | ——— |
| | +0.12 | +1.05 | +0.20 | +1.19 |
| | ——— | ——— | | |
| 1,−3 | +0.06 | +5.14 | −0.07 | +4.36 |
| | +0.31 | −2.22 | +0.37 | −1.14 |
| | −0.25 | −5.02 | −0.16 | −5.37 |
| 2,−3 | +1 | −31 | +2 | −23 |
| | −2 | +9 | −1 | +7 |
| | −1.67 | +31.43 | −3.26 | +22.83 |
| 3,−3 | −6 | +11 | +4 | −7 |
| | +2 | −4 | −2 | +2 |
| | +6 | −11 | −4 | +7 |
| 4,−3 | +17 | −7 | −11 | +4 |
| | −5 | +2 | +4 | −1 |
| | −17 | +7 | +12 | −4 |

Man controlirt diese Producte auf dieselbe Art wie die vorhergehenden. Man addirt nemlich je drei, zu einem und demselben Argument gehörigen, Glieder der Hülfsgrössen des vor. Art. und multiplicirt diese Summen wieder mit $n'\delta z'$ und bez. mit $\nu'$, die Producte müssen mit den ähnlichen Summen aus der vorstehenden Tafel übereinstimmen. Diese Producte sind hier zugleich $F'n'\delta z'$ und $G'\nu'$, die das Differential von $\delta \frac{h_0}{h}$ bilden, und dienen folglich auch zur Anwendung der Bedingungsgleichung (1) auf die Controle der hier zu berechnenden Glieder. Da die vorstehenden Producte so einfach zu berechnen gewesen sind, und so kleine Coefficienten enthalten, so habe ich in diesem Falle nicht für nöthig gehalten, die eben beschriebene Controle anzuwenden.

## 86.

Aus der Summe der beiden Producte des vor. Art. bekommen wir das Differential von $\delta W_0$, denn da wir die Breitenstörungen des Jupiters übergangen haben, so wird hier

$$\frac{d\delta W_0}{dt} = F'n'\delta z' + G'\nu'$$

Digitized by Google

Die Integration nicht nur dieses Ausdrucks, sondern auch die der folgenden, wird ohne Ausnahme durch die im vor. § entwickelten Formeln ausgeführt, weshalb ich die Integrale gleich folgen lasse.

$\partial W_0$

| $i,-i'$ | cos | sin | $i,-i'$ | cos | sin |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,−3 | 0".000 | 0".000 | 2,−3 | 0".000 | 0".000 |
| | +0.011 | −0.002 | | 0.000 | 0.000 |
| | 0.000 | 0.000 | | +0.263 | +0.024 |
| 1,−3 | +0.0460 | 0.0000 | | | |
| | 0.0000 | 0.0000 | | | |
| | −0.0001 | +0.0000 | | | |

| | $\varepsilon$ cos | $\varepsilon$ sin | | $\varepsilon$ cos | $\varepsilon$ sin |
|---|---|---|---|---|---|
| −1,1,0 | −0.30 | +0.29 | 0,−3 | —— | —— |
| 0,1,0 | ..... | +2 | | −8 | −49 |
| −1,2,0 | −1 | +1 | | —— | —— |
| 1,−1 | —— | +2 | 1,−3 | +0.2 | −209.1 |
| | −1 | −1 | | +0.7 | −3.5 |
| | +6 | +3 | | +0.4 | +9.9 |
| 2,−1 | −3 | −2 | 2,−3 | +3 | −57 |
| | +1 | —— | | −2 | +8 |
| | +8 | +3 | | +109 | −1194 |
| 1,−2 | +13 | +7 | 3,−3 | −1 | +2 |
| | +1 | +1 | | —— | −1 |
| | +11 | +6 | | +2 | −4 |
| 2,−2 | −2 | −2 | 1,−3 | +2 | −1 |
| | —— | —— | | —— | —— |
| | +10 | +10 | | −3 | +2 |
| 3,−2 | —— | +3 | | | |
| | —— | −1 | | | |
| | —— | −6 | | | |

| | $\varepsilon^2$ cos | $\varepsilon^2$ sin |
|---|---|---|
| 0,0,0 | −0.07 | |
| 1,0,0 | −1.72 | −0.69 |

Zufolge des fünften Satzes des §. 7 (II) muss hier die Gleichung

$$0 = -0".0000007 + 0".0000172 \times \tfrac{e}{2}$$

stattfinden, die auch bis auf die letzte Stelle erfüllt ist.

Digitized by Google

| | $2\delta\nu$ | | $nd z$ | |
|---|---|---|---|---|
| $i,-i'$ | cos | sin | sin | − cos |
| 0,−3 | −0".01 | 0".00 | −0".01 | 0".00 |
| 1,−3 | −0.07 | 0.00 | −1.47 | +0.04 |
| 2,−3 | −0.26 | −0.02 | +0.26 | +0.02 |

| | $\varepsilon$ cos | $\varepsilon$ sin | $\varepsilon$ sin | − $\varepsilon$ cos |
|---|---|---|---|---|
| 1,0 | +2 | −4 | −2 | +6 |
| 1,−1 | −11 | −6 | +8 | +6 |
| 2,−1 | −4 | −2 | +3 | +1 |
| 1,−2 | −33 | −17 | +82 | +46 |
| 2,−2 | −8 | −8 | +5 | +6 |
| 3,−2 | — | +2 | — | −2 |
| 0,−3 | −8 | −47 | +8 | +38 |
| 1,−3 | −7 | +295 | +68 | +3258 |
| 2,−3 | −116 | +1259 | +115 | −1273 |
| 3,−3 | −1 | +2 | −2 | +26 |

| | $\varepsilon^2$ cos | $\varepsilon^2$ sin | $\varepsilon^2$ sin | − $\varepsilon^2$ cos |
|---|---|---|---|---|
| 0,0 | +0.15 | | | +0.15 |
| 1,0 | +1.72 | +0.69 | −1.72 | −0.69 |
| 2,0 | | | +0.04 | +0.02 |

Nachdem man in diesen und in den im vor. § berechneten, mit $\varepsilon$ und $\varepsilon^2$ multiplicirten Gliedern durch die Ausdrücke des Art. 74 $nt$ und $n^2t^2$ statt $\varepsilon$ und $\varepsilon^2$ ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen eingeführt hat, muss man $t$ von dem Zeitpunkt an zählen, für welchen die den Rechnungen zu Grunde gelegten Elemente gelten. Wenn daher die Elemente des gestörten und die des störenden Planeten, die in der Störungsrechnung angewandt worden sind, zwei verschiedenen Zeitpunkten angehören, so hat dieses keine andere Wirkung, als dass der Werth $t=0$ ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen in den im vor. § berechneten Gliedern ein anderer ist, wie in den in diesem § berechneten, und indem man in der einen oder anderen Gattung dieser Störungen für $t$ den Unterschied dieser beiden Zeitpunkte ein für alle Mal substituirt, reducirt man $t$ für beide auf Einen Zeitpunkt. Hiemit ist die im Art. 77 (I) eingefügte Bemerkung erklärt.

Digitized by Google

87.

Ausser den im Vorhergehenden betrachteten, von den Producten der Massen abhängenden Störungen können noch hie und da solche merklich werden, die in ihren Argumenten Vielfache von drei Anomalien enthalten, und zwar Vielfache von der Anomalie des gestörten Planeten und von den Anomalien von zwei störenden Planeten. In der Bewegung der kleinen Planeten sind es vorzugsweise Jupiter und Saturn, die hiebei in Betracht kommen, und es soll daher im Folgenden die mittlere Anomalie des Jupiters mit $g'$, und die des Saturns mit $g''$ bezeichnet werden. Da solche Ungleichheiten immer nur dadurch merklich werden, dass sie bei den Integrationen sehr kleine Divisoren bekommen, so werden von denselben in der Regel überhaupt nur die Glieder merklich, die das Quadrat des kleinen Divisors erhalten, und dieser Umstand erleichtert ihre Berechnung sehr. Aus den Artt. 38 und 45 (II) geht hervor, dass alle Glieder, die die Quadrate der Divisoren erhalten, aus der doppelten Integration von $a\left(\frac{d\Omega}{da}\right)$ entspringen, wenn wir daher die kleinen Breitenstörungen des Jupiters und Saturns übergehen, so wird für die oben genannten Glieder

$$n\delta z = -3\iint\left\{a\left(\frac{d^2\Omega}{da\,dc'}\right)n'\delta z' - \left[\left(\frac{da\,r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{da}\right) + a\left(\frac{d\Omega}{da}\right)\right]\nu'\right\}d\varepsilon^2 \qquad (31)$$

$$-3\iint\left\{a\left(\frac{d^2\Omega'}{da\,dc''}\right)n''\delta z'' - \left[\left(\frac{da\,r\left(\frac{d\Omega'}{dr}\right)}{da}\right) + a\left(\frac{d\Omega'}{da}\right)\right]\nu''\right\}d\varepsilon^2$$

wo $\Omega$ den Theil der Störungsfunction bezeichnet, welcher vom Jupiter, und $\Omega'$ den, welcher vom Saturn herrührt, und $c'$, $n'\delta z'$, $\nu'$ sich auf den Jupiter, sowie $c''$, $n''\delta z''$, $\nu''$ sich auf den Saturn beziehen. Beide Functionen geben hier Grössen von derselben Ordnung, nemlich von der Ordnung $m'm''$, wenn damit die Massen des Jupiters und des Saturns verstanden werden. Die von den Saturnstörungen herrührenden Glieder sind jedoch, im Allgemeinen wenigstens, um deswillen kleiner, wie die aus den Jupiterstörungen entstehenden, weil das Verhältniss der grossen Achse des gestörten Planeten zur grossen Achse der Saturnbahn kleiner ist, wie zu der der Jupiterbahn.

Digitized by Google

88.

Die Jupiter- und Saturnstörungen sind durch Reihen gegeben, die nach den Sinussen und Cosinussen der Vielfachen der mittleren Anomalien $g'$ und $g''$ fortschreiten, während die Störungen der kleinen Planeten hier in der Form

$$\frac{\sin}{\cos}\{(i-i'\mu)\varepsilon - i'(c'-\mu c)\}$$

dargestellt worden sind. Zum jetzigen Zweck muss die eine dieser Formen auf die andere hingeführt werden, und es ist bei Weitem das Einfachste, die Form $\frac{\sin}{\cos}(i'g'-i''g'')$ auf die vorstehende Form hinzuführen, wie die entgegengesetzte Reduction auszuführen. Die Ausführung dieser Umformung werde ich weiter unten geben, und sie hier schon ausgeführt annehmen. Seien daher

$$\begin{aligned}
n'\delta z' = {} & \alpha_0 \sin(0,k',k'') + \alpha_1 \sin(1,k',k'') + \alpha_2 \sin(2,k',k'') + \ldots \\
& - \alpha_1 \sin(-1,k',k'') + \alpha_2 \sin(-2,k',k'') \mp \ldots \\
& + \beta_0 \cos(0,k',k'') + \beta_1 \cos(1,k',k'') + \beta_2 \cos(2,k',k'') + \ldots \\
& - \beta_1 \cos(-1,k',k'') + \beta_2 \cos(-2,k',k'') \mp \ldots \\
\nu' = {} & \gamma_0 \cos(0,k',k'') + \gamma_1 \cos(1,k',k'') + \gamma_2 \cos(2,k',k'') + \ldots \\
& - \gamma_1 \cos(-1,k',k'') + \gamma_2 \cos(-2,k',k'') \mp \ldots \\
& + \delta_0 \sin(0,k',k'') + \delta_1 \sin(1,k',k'') + \delta_2 \sin(2,k',k'') + \ldots \\
& - \delta_1 \sin(-1,k',k'') + \delta_2 \sin(-2,k',k'') \mp \ldots
\end{aligned}$$

wo allgemein

$$(k,k',k'') = (k+k'\mu-k''\mu')\varepsilon + k'(c'-\mu c) - k''(c''-\mu' c)$$

$$\mu = \frac{n'}{n},\ \mu' = \frac{n''}{n}$$

ist, eine Reihe von Gliedern aus den vom Saturn verursachten Jupiterstörungen; seien ferner gleichwie in der Abhandlung (II)

$$\begin{aligned}
(i)\, a\delta\Omega = {} & \Sigma\Sigma b(i,i',c)\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon - i'(c'-\mu c)\} \\
& + \Sigma\Sigma b(i,i',s)\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon - i'(c'-\mu c)\}
\end{aligned}$$

von welchen für unser Beispiel die Zahlenwerthe der Coefficienten im Art. (84) (I) gegeben sind; ferner

$$\begin{aligned}
\left(\frac{d.ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{d\varepsilon}\right) = {} & -\Sigma\Sigma d(i,i',c)\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon - i'(c'-\mu c)\} \\
& + \Sigma\Sigma d(i,i',s)\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon - i'(c'-\mu c)\}
\end{aligned}$$

von dessen Coefficienten sich für unser Beispiel die Zahlenwerthe im Art. 43 befinden, so wird

Digitized by Google

$$a\left(\frac{d^2\Omega}{dt\,dc'}\right) = \Sigma\Sigma e(i,i',c)\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon - i'(c'-\mu c)\} + \Sigma\Sigma e(i,i',s)\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon - i'(c'-\mu c)\}$$

$$\left(\frac{dar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{dt}\right) + a\left(\frac{d\Omega}{dt}\right) = -\Sigma\Sigma f(i,i',c)\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon - i'(c'-\mu c)\} + \Sigma\Sigma f(i,i',s)\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon - i'(c'-\mu c)\}$$

wo zur Abkürzung

$$e(i,i',c) = i'b(i,i',c);\ e(i,i',s) = i'b(i,i',s)$$
$$f(i,i',c) = d(i,i',c) + b(i,i',c)$$
$$f(i,i',s) = d(i,i',s) + b(i,i',s)$$

gesetzt worden ist, und hiemit giebt der obige Ausdruck, wenn wir darin blos auf die Jupiterstörungen Rücksicht nehmen

$$n\delta z = \tfrac{1}{2}\frac{\left\{\begin{array}{l} \mp \text{etc.} + \alpha_2.e(i+2,i',c) - \alpha_1.e(i+1,i',c) \\ + \alpha_0.e(i,i',c) + \alpha_1.e(i-1,i',c) + \alpha_2.e(i-2,i',c) + \text{etc.} \\ \mp \text{etc.} + \beta_2.e(i+2,i',s) - \beta_1.e(i+1,i',s) \\ + \beta_0.e(i,i'.s) + \beta_1.e(i-1,i',s) + \beta_2.e(i-2,i',s) + \text{etc.} \\ \pm \text{etc.} - \gamma_2.f(i+2,i',c) + \gamma_1.f(i+1,i',c) \\ - \gamma_0.f(i,i',c) - \gamma_1.f(i-1,i',c) - \gamma_2.f(i-2,i',c) - \text{etc.} \\ \mp \text{etc.} + \delta_2.f(i+2,i',s) - \delta_1.f(i+1,i',s) \\ + \delta_0.f(i,i',s) + \delta_1.f(i-1,i',s) + \delta_2.f(i-2,i',s) + \text{etc.} \end{array}\right\}\sin(i,i'+k',k'')}{(i+(i'+k')\mu - k''\mu')^2}$$

$$+ \tfrac{1}{2}\frac{\left\{\begin{array}{l} \pm \text{etc.} - \alpha_2.e(i+2,i',s) + \alpha_1.e(i+1,i',s) \\ - \alpha_0.e(i,i',s) - \alpha_1.e(i-1,i',s) - \alpha_2.e(i-2,i',s) - \text{etc.} \\ \mp \text{etc.} + \beta_2.e(i+2,i',c) - \beta_1.e(i+1,i',c) \\ + \beta_0.e(i,i',c) + \beta_1.e(i-1,i',c) + \beta_2.e(i-2,i',c) + \text{etc.} \\ \mp \text{etc.} + \gamma_2.f(i+2,i',s) - \gamma_1.f(i+1,i',s) \\ + \gamma_0.f(i,i',s) + \gamma_1.f(i-1,i',s) + \gamma_2.f(i-2,i',s) + \text{etc.} \\ \mp \text{etc.} + \delta_2.f(i+2,i',c) - \delta_1.f(i+1,i',c) \\ + \delta_0.f(i,i',c) + \delta_1.f(i-1,i',c) + \delta_2.f(i-2,i',c) + \text{etc.} \end{array}\right\}\cos(i,i'+k,k'')}{(i+(i'+k')\mu - k''\mu')^2}$$

wenn

$$(i,i'+k',k'') = (i+(i'+k')\mu - k''\mu')\varepsilon + (i'+k')(c'-\mu c) - k''(c''-\mu' c)$$

das Argument der Ungleichheit langer Periode ist. Irgend eine andere Gruppe der Jupiterstörungen, in welcher $k''$ denselben Werth hat wie oben, $k'$ aber einen anderen, den ich mit $k_1'$ bezeichnen will, giebt in derselben Ungleichheit ganz ähnliche Glieder wie die vorstehenden,



Digitized by Google

wenn man sie mit den $e$ und $f$ Coefficienten verbindet, deren zweiter Index $i_1'$ statt $i'$ ist, und $i_1'$ so gewählt werden muss, dass

$$i_1' + k_1' = i' + k'$$

wird. Auch die Saturnstörungen geben ganz ähnliche Ausdrücke wie der vorstehende, nur muss man für diese dem Argument der Ungleichheit langer Periode die Form

$$i + k'\mu - (i'' + k'')\mu'$$

geben, da die Argumente der Störungen, die der gestörte Planet vom Saturn erleidet, die Form

$$(i - i''\mu')\varepsilon - i''(c'' - \mu' c)$$

haben. In den verschiedenen hier anzuwendenden Störungsgliedern des Saturns bleibt $k'$ unverändert, $k''$ hingegen kann verschiedene Werthe annehmen, die mit solchen Gliedern der Störungsfunction verbunden werden müssen, dass immer

$$i_1'' + k_1'' = i'' + k''$$

wird. Wenn überhaupt eine solche Ungleichheit langer Periode merklich wird, so können es immer nur einige wenige Glieder der Jupiter- und Saturnstörungen sein, die merkliche Coefficienten geben, und diese Rechnung ist daher immer leicht auszuführen.

## 89.

Ich werde jetzt zeigen, wie man irgend ein Glied $\frac{\sin}{\cos}(i'g' - i''g'')$ der Jupiter- oder Saturnstörungen auf die im vor. Art. verlangte Form hinführt. Sei wie früher

$$y = h^{g\sqrt{-1}},\ z' = h^{g'\sqrt{-1}},\ \pi = h^{(c' - c\mu)\sqrt{-1}},\ \lambda = \tfrac{1}{2}\mu e$$

und ausserdem

$$z'' = h^{g''\sqrt{-1}},\ \pi' = h^{(c'' - \mu' c)\sqrt{-1}},\ \lambda' = \tfrac{1}{2}\mu' e$$

wo $h$ die Grundzahl der natürlichen Logarithmen bedeutet, dann wird zufolge des Art. 74 (1)

$$\begin{aligned} z'^{i'} = {} & J^{(0)}_{i'i} y^{i'\mu} \pi^{i'} + J^{(1)}_{i'i} y^{-1+i'\mu} \pi^{i'} + J^{(2)}_{i'i} y^{-2+i'\mu} \pi^{i'} + \ldots \\ & - J^{(1)}_{i'i} y^{1+i'\mu} \pi^{i'} + J^{(2)}_{i'i} y^{2+i'\mu} \pi^{i'} \mp \ldots \\ z''^{-i''} = {} & J^{(0)}_{i''i'} y^{-i''\mu'} \pi'^{-i''} + J^{(1)}_{i''i'} y^{1-i''\mu'} \pi'^{-i''} + J^{(2)}_{i''i'} y^{2-i''\mu'} \pi'^{-i''} + \ldots \\ & - J^{(1)}_{i''i'} y^{-1-i''\mu'} \pi'^{-i''} + J^{(2)}_{i''i'} y^{-2-i''\mu'} \pi'^{-i''} \mp \ldots \end{aligned}$$

Digitized by Google

multiplicirt man diese beiden Ausdrücke mit einander, und setzt zur Abkürzung

$$(l', l'') = J_{i'i}^{(i')} \cdot J_{i''i'}^{(i'')}$$

$$\begin{aligned}
K(0) &= (0.0) + 2(1.1) + 2(2.2) + \ldots \\
K(1) &= (0.1) + (1.2) + (2.3) + \ldots \\
&\quad -(1.0) - (2.1) - (3.2) - \ldots \\
K(2) &= -(1.1) + (0.2) + (1.3) + \ldots \\
&\quad + (2.0) + (3.1) + \ldots \\
K(3) &= -(1.2) + (0.3) + (1.4) + \ldots \\
&\quad + (2.1) - (3.0) - (4.1) - \ldots \\
K(4) &= (2.2) - (1.3) + (0.4) + (1.5) + \ldots \\
&\quad - (3.1) + (4.0) + (5.1) + \ldots
\end{aligned}$$

etc.

so wird

$$\begin{aligned}
z'^{i'} z''^{-i''} = {} & K(0)\, y^{i'\mu - i''\mu'} \pi'^{i'} \pi'^{-i''} + K(1)\, y^{1+i'\mu-i''\mu'} \pi'^{i'} \pi'^{-i''} + K(2) y^{2+i'\mu-i''\mu'} \pi'^{i'} \pi'^{-i''} + \ldots \\
& - K(1)\, y^{-1+i'\mu-i''\mu'} \pi'^{i'} \pi'^{-i''} + K(2) y^{-2+i'\mu-i''\mu'} \pi'^{i'} \pi'^{-i''} \mp \ldots
\end{aligned}$$

Geht man zum Reellen über, so erhält man hieraus

$$\begin{aligned}
\begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}(i'g' - i''g'') = {} & K(0) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}(0, i', i'') + K(1) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}(1, i', i'') + K(2) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}(2, i', i'') + \ldots \\
& - K(1) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}(-1, i', i'') + K(2) \begin{matrix}\cos \\ \sin\end{matrix}(-2, i', i'') \mp \ldots
\end{aligned}$$

wo

$$(i, i', i'') = (i + i'\mu - i''\mu')\varepsilon + i'(c' - c\mu) - i''(c'' - c\mu')$$

ist. Wenn daher

$$\begin{aligned}
n'\delta z' &= p \sin(i'g' - i''g'') + p' \cos(i'g' - i''g'') \\
\nu' &= q \cos(i'g' - i''g'') + q' \sin(i'g' - i''g'')
\end{aligned}$$

irgend zwei zusammengehörige Glieder der vom Saturn bewirkten Jupiterstörungen sind, so bekommt man die im vor. Art. mit $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, bezeichneten Coefficienten durch folgende Ausdrücke

$$\begin{aligned}
&\alpha_0 = pK(0), \ \alpha_1 = pK(1), \ \alpha_2 = pK(2), \text{ etc.} \\
&\beta_0 = p'K(0), \ \beta_1 = p'K(1), \ \beta_2 = p'K(2), \text{ etc.} \\
&\gamma_0 = qK(0), \ \gamma_1 = qK(1), \ \gamma_2 = qK(2), \text{ etc.} \\
&\delta_0 = q'K(0), \ \delta_1 = q'K(1), \ \delta_2 = q'K(2), \text{ etc.}
\end{aligned}$$

und ebenso bringt man die vom Jupiter bewirkten Saturnstörungen auf dieselbe Form. Die numerischen Werthe, die $\mu$, $\mu'$ und die Excentricität $e$ des gestörten Planeten in unserm Sonnensystem haben, verursachen, dass von den vorstehenden Coefficienten nur die ersten jeder Reihe merklich werden.



Digitized by Google

90.

Die Argumente langer Perioden sind leicht zu finden, man braucht nur für $i'=1$, $i'=2$, $i'=3$, etc. indem man sie nach einander mit $i''=1$, $i''=2$, $i''=3$, etc. verbindet, die Werthe von

$$i'\mu \pm i''\mu'$$

zu berechnen. Wenn diese Grösse einer ganzen Zahl, die ich mit $l$ bezeichnen will, nahe gleich ist, so ist bez.

$$l - i'\mu - i''\mu' \text{ oder } l - i'\mu + i''\mu'$$

der mit $\varepsilon$ multiplicirte Theil des Arguments langer Periode. Um die eben genannten Grössen leicht zu erhalten, braucht man sich nur im Voraus ein Täfelchen für $i'\mu$ und eins für $i''\mu'$ zu machen, so wie sie hier schon im Art. (78) (I) und im Art. (4) (II) vorkommen. Da aber der zu Grunde gelegte Werth von $n$ auf die Zahlenwerthe der zu ermittelnden Argumente sehr grossen Einfluss hat, so ist es angemessen, diese Untersuchung bis dahin aufzuschieben, wo man im Besitz eines genauen Werthes der wahren mittleren Bewegung sein wird.

Der im Vorhergehenden aufgestellte Ausdruck

$$i + (i'+k')\mu - k''\mu'$$

schliesst zwar den Werth $i=0$ nicht aus, aber für $i=0$ ist die betreffende Ungleichheit auch gleich Null.

Um diesen Satz auf die einfachste Art zu beweisen, wollen wir uns alle Glieder des Ausdrucks (31) in Reihen entwickelt denken, die nach den Sinussen und Cosinussen der mittleren Anomalien fortschreiten. Der erste Theil dieses Ausdrucks kann hierauf wie folgt geschrieben werden,

$$n\delta z = -3n^2\iint\left\{a\left(\frac{d\Omega}{dg\,dg'}\right)n'\delta z' - \left[\left(\frac{da\,r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{dg}\right)+a\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)\right]\nu'\right\}\delta z^2$$

und der zweite Theil nimmt eine analoge Form an. Da aber $n'\delta z'$ und $\nu'$ kein $g$ enthalten, so können in den Differentialquotienten von $\Omega$, die hier vorkommen, auch nur die Glieder die kein $g$ enthalten, auf die Ungleichheit, in welcher $i=0$ sein soll, Einfluss haben. Sei aber irgend eins dieser

$$a\Omega = b\cos i'g' + b'\sin i'g'$$

so ist in Beziehung darauf $a\left(\frac{d\Omega}{dg}\right)=0$, und folglich die in Rede stehende Ungleichheit auch gleich Null. W. z. b. w.

Digitized by Google

Es möchte wohl nicht undienlich sein, diesen Satz auch durch ein numerisches Beispiel zu belegen, und ich will daher den Theil des Coefficienten der Ungleichheit in der Bewegung der Egeria rechnen, welche $2g' - 5g''$ zum Argument hat, und von der Ungleichheit in der Bewegung des Jupiters herrührt, die $3g' - 5g''$ zum Argument hat. Da der vorstehende Satz für die einzelnen Abschnitte des Ausdrucks der Coefficienten Geltung hat, so muss der genannte Theil dieses Coefficienten, gleichwie alle übrigen ähnlichen Theile für sich Null werden. Aus Art. (84) (I) findet man

$\log J^{(0)}_{31} = 9.99914$, $\log J^{(1)}_{31} = 8.6466$, $\log J^{(2)}_{31} = 6.9928$, $\log J^{(3)}_{31} = 5.163$

und aus Art. (19) (II)

$\log J^{(0)}_{51'} = 9.99958$, $\log J^{(1)}_{51'} = 8,4737$, $\log J^{(2)}_{51'} = 6.647$

und hiemit ergab sich

$K(0) = 0.99969$, $K(1) = -0.01459$, $K(2) + 0.00010$, $K(3) = +0.00001$

Aus meiner Preisschrift über die gegenseitigen Störungen des Jupiter und Saturn p. 76 entnehme ich nach der Reduction auf die hier überhaupt angewandte Saturnmasse

$$n'\partial z' = +154.937 \sin(3g' - 5g'') + 12.612 \cos(3g' - 5g'')$$

Drückt man nun die Coefficienten $\alpha$, $\beta$, in Theilen des Radius aus, so findet man

$\log \frac{1}{2}\alpha_0 = 6.5745$, $\log \frac{1}{2}\beta_0 = 5.4852$

$\log \frac{1}{2}\alpha_1 = 4.739n$, $\log \frac{1}{2}\beta_1 = 3.649n$

$\log \frac{1}{2}\alpha_2 = 2.575$, $\log \frac{1}{2}\beta_2 = 1.485$

und aus Art. (84) (I) ergiebt sich

$e(-1.1.c) = -0.342$, $e(-1.1.s) = -0.523$

$e(\ 0.1.c) = +0.014$, $e(\ 0.1.s) = +0.046$

$e(\ 1.1.c) = -1.305$, $e(\ 1.1.s) = -3.699$

$e(\ 2.1.c) = +0.638$, $e(\ 2.1.s) = -0.246$

Die Multiplicationen nach Vorschrift des Ausdrucks des Art. 88 für $n\partial z$ geben hiemit

| | | | |
|---|---|---|---|
| $\frac{1}{2}\alpha_2 e(\ 2.1.c) =$ | $0.0000000$, | $-\frac{1}{2}\alpha_1 e(\ 2.1.s) =$ | $0.0000000$ |
| $\frac{1}{2}\beta_2 e(\ 2.1.s) =$ | $0.0000000$, | $\frac{1}{2}\beta_1 e(\ 2.1.c) =$ | $0.0000000$ |
| $-\frac{1}{2}\alpha_1 e(\ 1.1.c) =$ | $-0.0000072$, | $\frac{1}{2}\alpha_1 e(\ 1.1.s) =$ | $+0.0000203$ |
| $-\frac{1}{2}\beta_1 e(\ 1.1.s) =$ | $-0.0000017$, | $-\frac{1}{2}\beta_1 e(\ 1.1.c) =$ | $-0.0000006$ |
| $\frac{1}{2}\alpha_0 e(\ 0.1.c) =$ | $+0.0000053$, | $-\frac{1}{2}\alpha_0 e(\ 0.1.s) =$ | $-0.0000173$ |
| $\frac{1}{2}\beta_0 e(\ 0.1.s) =$ | $+0.0000014$, | $\frac{1}{2}\beta_0 e(\ 0.1.c) =$ | $+0.0000004$ |
| $\frac{1}{2}\alpha_1 e(-1.1.c) =$ | $+0.0000019$, | $-\frac{1}{2}\alpha_1 e(-1.1.s) =$ | $-0.0000029$ |
| $\frac{1}{2}\beta_1 e(-1.1.s) =$ | $+0.0000002$, | $\frac{1}{2}\beta_1 e(-1.1.c) =$ | $+0.0000002$ |
| Summe = | $-0.0000001$, | Summe = | $+0.0000001$ |

welches für Null gehalten werden muss, wie der obige Satz verlangt.

Digitized by Google

Die Wirkung der grossen Ungleichheit langer Periode in der Bewegung des Jupiters und Saturns auf den gestörten Planeten wird am Einfachsten dadurch berücksichtigt, dass man den jedesmaligen Betrag derselben in allen Ungleichheiten den Längen der Epochen $c'$ und $c''$ hinzufügt. So habe ich es schon im Art. (61) (II) bei der Berechnung der Werthe der Constanten für die Egeria gemacht.

Sollte indess in der Bewegung des gestörten Planeten eine Ungleichheit vorkommen, deren Periode nahe dieselbe ist, wie die Periode der grossen Ungleichheit des Jupiters und Saturns, so darf in Bezug auf diese Ungleichheit dieses Verfahren nicht angewandt werden, denn wenn der Coefficient von $\varepsilon$ in dieser Ungleichheit mit $l - l'\mu$ bezeichnet wird, so entstehen hieraus zwei Ungleichheiten langer Periode, für welche die Coefficienten von $\varepsilon$ in den Argumenten die folgenden sind,

$$l - (l' - 2)\,\mu - 5\mu'$$

und

$$l - (l' + 2)\,\mu + 5\mu'$$

und die durch das im Vorhergehenden erklärte Verfahren berechnet werden müssen.

## 91.

Wendet man den Ausdruck (30) auf den in der Abhandlung (II) Art. 59 und 61 gegebenen numerischen Werth von $\delta\frac{h}{h_0}$ an, so ergiebt sich

$$2H_1 = +0{:}047$$

Im Art. 57 sind die numerischen Werthe

$$\Upsilon(0.c) = +1{:}039 \qquad \Psi(0.c) = -0{:}027$$
$$\Upsilon'(1.s) = +0{:}00020 \quad \Psi'(1.s) = -0{:}00034$$

enthalten, und hiemit wird zufolge (29)

$$V_1 = +3{:}090$$

und

$$\tfrac{1}{3}(3V_1 + 2H_1) = +3{:}10$$

welche Grösse zufolge des Art. 76 ein Theil der zu $2\delta\nu$ zu addirenden Constante ausmacht. Stellen wir nun die im Vorhergehenden berechneten Störungen zweiter Ordnung zusammen, verwandeln $\varepsilon$ in $nt$ ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen, und fügen $\delta\nu$ einstweilen den eben berechneten Theil der überhaupt zuzufügenden Constante zu, so erhalten wir

Digitized by Google

| | $n\delta z$ | | $2\delta v$ | | $\frac{\delta u}{\cos i}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $i$, $i'\mu$ | sin | cos | cos | sin | sin | cos |
| 0,0 | | $-3''.4447nt$<br>$-0.0000187n^2t^2$ | $+3''.40$<br>$+0.03566nt$<br>$+0.0000462n^2t^2$ | | | $+0''.47$<br>$+0.01024nt$<br>$+0.0000949n^2t^2$ |
| 1,0 | $+1''.51$<br>$-0.38534nt$<br>$-0.0004433n^2t^2$ | $-1''.74$<br>$-0.47724nt$<br>$+0.0000956n^2t^2$ | $-0''.78$<br>$+0.38684nt$<br>$+0.0004458n^2t^2$ | $-1''.39$<br>$-0.47645nt$<br>$+0.0000953n^2t^2$ | $-0''.20$<br>$-0.02948nt$<br>$-0.0000804n^2t^2$ | $-0''.05$<br>$+0.00591nt$<br>$-0.0004627n^2t^2$ |
| 2,0 | $+0''.34$<br>$+0.00084nt$<br>$+0.0000003n^2t^2$ | $-1''.76$<br>$+0.00478nt$<br>$+0.0000042n^2t^2$ | $-0''.29$<br>$+0.00642nt$<br>$+0.0000074n^2t^2$ | $-1''.52$<br>$-0.00474nt$<br>$+0.0000051n^2t^2$ | $-0''.27$<br>$-0.01303nt$<br>$+0.0000240n^2t^2$ | $+0''.13$<br>$+0.01615nt$<br>$+0.0000468n^2t^2$ |
| 3,0 | $-0''.01$<br>$+0.00015nt$<br>$+0.0000002n^2t^2$ | $0''.00$<br>$+0.00013nt$<br>$-0.0000001n^2t^2$ | $-0''.01$<br>$+0.00021nt$<br>$+0.0000003n^2t^2$ | $-0''.07$<br>$-0.00013nt$<br>$+0.0000002n^2t^2$ | $0''.00$<br>$-0.00021nt$<br>$+0.0000005n^2t^2$ | $0''.00$<br>$+0.00029nt$<br>$+0.0000010n^2t^2$ |
| −2,−1 | 0.00 | −0.00 | +0.05 | −0.01 | | |
| −1,−1 | +0.88<br>+0.00166$nt$ | +0.24<br>+0.00149$nt$ | +1.05<br>+0.00218$nt$ | −0.36<br>−0.00191$nt$ | +0.06 | +0.16 |
| 0,−1 | +4.40<br>+0.00244$nt$ | −3.62<br>+0.00169$nt$ | +1.72<br>+0.00155$nt$ | +0.93<br>−0.00112$nt$ | +0.01 | +0.08 |
| 1,−1 | +0.63<br>−0.00121$nt$ | −1.03<br>−0.00074$nt$ | −0.45<br>+0.00097$nt$ | −0.82<br>−0.00072$nt$ | −0.11 | −0.18 |
| 2,−1 | −0.29<br>−0.00142$nt$ | −0.63<br>−0.00028$nt$ | +0.30<br>+0.00150$nt$ | −0.74<br>−0.00036$nt$ | −0.07 | +0.02 |
| 3,−1 | +0.04 | +0.02 | −0.05 | 0.00 | | |
| −1,−2 | 0.00 | +0.40 | 0.00 | −0.08 | | |
| 0,−2 | +0.47<br>+0.00555$nt$ | −0.77<br>−0.00342$nt$ | +0.10<br>+0.00436$nt$ | +0.70<br>+0.00265$nt$ | +0.39 | 0.00 |
| 1,−2 | −1.47<br>+0.01679$nt$ | −7.33<br>−0.01484$nt$ | +0.45<br>−0.00445$nt$ | −2.20<br>−0.00287$nt$ | +0.01 | +0.08 |
| 2,−2 | −1.03<br>−0.00276$nt$ | −0.24<br>+0.00415$nt$ | +0.87<br>+0.00291$nt$ | −0.24<br>+0.00427$nt$ | −0.13 | +0.42 |
| 3,−2 | −0.81<br>−0.00049$nt$ | −0.02<br>+0.00179$nt$ | +0.70<br>+0.00042$nt$ | −0.03<br>+0.00159$nt$ | +0.04 | +0.07 |
| 4,−2 | +0.01 | +0.01 | +0.04 | +0.02 | | |
| 0,−3 | −1.10<br>+0.00289$nt$ | −2.30<br>+0.00044$nt$ | −1.17<br>+0.00236$nt$ | +2.20<br>−0.00124$nt$ | −0.17<br>+0.00462$nt$ | +0.75<br>+0.01456$nt$ |
| 1,−3 | −56.57<br>−0.04914$nt$ | −33.84<br>−0.37649$nt$ | −2.79<br>−0.00357$nt$ | +1.46<br>+0.02199$nt$ | −0.27<br>−0.01096$nt$ | +0.36<br>−0.00189$nt$ |
| 2,−3 | +42.44<br>+0.04164$nt$ | +0.43<br>+0.04121$nt$ | −44.86<br>−0.04134$nt$ | +0.44<br>+0.04064$nt$ | +0.44<br>−0.00098$nt$ | +0.53<br>+0.04691$nt$ |
| 3,−3 | +1.44<br>−0.00230$nt$ | −1.44<br>−0.00680$nt$ | −1.30<br>+0.00188$nt$ | −1.17<br>−0.00486$nt$ | −0.52<br>−0.01229$nt$ | −0.16<br>+0.00288$nt$ |
| 4,−3 | −0.02<br>−0.00013$nt$ | −0.04<br>+0.00002$nt$ | −0.06<br>+0.00021$nt$ | −0.10<br>−0.00021$nt$ | −0.02<br>−0.00059$nt$ | 0.00<br>+0.00040$nt$ |
| 0,−4 | −0.03 | 0.00 | −0.03 | −0.01 | | |
| 1,−4 | −0.13 | +0.08 | −0.03 | −0.04 | | |
| 2,−4 | +0.92 | −0.57 | −0.62 | −0.44 | | |
| 3,−4 | +0.28 | −0.44 | −0.30 | −0.47 | | |
| 4,−4 | 0.00 | +0.03 | 0.00 | 0.00 | | |
| 5,−4 | +0.02 | +0.01 | −0.02 | +0.01 | | |
| 1,−5 | +0.01 | +0.09 | +0.01 | −0.06 | | |
| 2,−5 | +0.66 | +0.28 | −0.20 | +0.19 | | |
| 3,−5 | −0.29 | +0.21 | +0.20 | +0.40 | | |
| 4,−5 | −0.43 | −0.32 | +0.37 | −0.23 | | |
| 5,−5 | +0.01 | +0.01 | +0.02 | −0.01 | | |
| 6,−5 | −0.01 | +0.01 | +0.01 | +0.01 | | |
| 1,−6 | +0.03 | −0.01 | +0.04 | 0.00 | | |
| 2,−6 | +0.58 | −0.14 | +0.13 | −0.07 | | |
| 3,−6 | −1.02 | −1.02 | +1.05 | −1.19 | −0.13 | +0.20 |
| 4,−6 | +0.69 | +0.01 | −0.44 | −0.05 | −0.07 | −0.15 |
| 5,−6 | +0.02 | −0.03 | −0.05 | −0.08 | | |

Digitized by Google

wozu noch die Ausdrücke des Art. 80 für $\Gamma$ und $\delta_2 u$ kommen. — Geht man diese Zusammenstellung durch, so findet man eine Anzahl kleiner Glieder, die auf den Ort der Egeria nur sehr geringe Wirkung äussern, und weggelassen werden können. Im Voraus weiss man dieses aber nicht, und muss daher, wenn das Resultat vollständig sein soll, sie in der Rechnung mit berücksichtigen. Es befinden sich aber auch in der vorstehenden Tafel mehrere Glieder, die sehr bedeutenden Einfluss auf den Ort der Egeria haben, und zu erkennnen geben, dass man in der Theorie der kleinen Planeten das Quadrat der störenden Kraft wenigstens nicht immer übergehen darf. Die in den Ausdrücken von $n\delta z$ und $\nu$ enthaltenen Säcularänderungen haben einen bedeutenden Zuwachs erhalten. Der Coefficient des in $n\delta z$ mit $nt$ sin $\varepsilon$ und $\nu$ mit $nt$ cos $\varepsilon$ multiplicirten Gliedes ist um fast die Hälfte grösser geworden, und der bez. mit $nt$ cos $\varepsilon$ und $nt$ sin $\varepsilon$ fast um den fünften Theil. Die Uebergehung dieser Glieder würde sehr merklich sein. Ferner hat der Coefficient der Ungleichheit langer Periode, welche vom Argument $1,-3$ abhängt, durch Zuziehung des Quadrats der störenden Kraft eine Aenderung von mehr wie eine Minute, und der des Arguments $2,-3$ eine Aenderung von fast einer halben Minute erlitten. Da $n=1,52$ ist, wenn man für die Einheit in $t$ das Julianische Jahr wählt, so zeigt die vorstehende Tafel ferner, dass der Coefficient des Arguments $1,-3$ sich jährlich um mehr wie eine halbe Secunde vermindert. Die Säcularänderung der mittleren Länge, nemlich das Glied $-0''.0000187\ n^2t^2$, ist bei der Egeria wie bei den alten Planeten klein, ebenfalls sind die Breitenstörungen der Egeria, die vom Quadrat der störenden Kraft abhängen, nicht sehr bedeutend.

## 92.

Indem wir jetzt zur Bestimmung der Theile der willkührlichen Constanten übergehen, die vom Quadrat der störenden Kraft abhängen, müssen wir zufolge des §. 5 (II) aus den Angaben des vor. Art. zuerst die numerischen Werthe der dort $(n\delta z)_0$, $(\nu)_0$, $\left(\frac{u}{\cos i}\right)_0$, $\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0$, $\left(\frac{d\nu}{d\varepsilon}\right)_0$, $\left(\frac{du}{\cos i\, d\varepsilon}\right)_0$ genannten Grössen rechnen. Die ersten drei dieser bekommt man unmittelbar durch die Substitution der der hier angenommenen Zeitepoche entsprechenden Werthe der Argumente, und indem man ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen $t=0$ macht. Um die beiden

Digitized by Google

letzten zu erhalten, braucht man ausser dieser Substitution nur die Coefficienten mit den bekannten Integrationsdivisoren zu multipliciren und die Sinusse in Cosinusse, so wie die Cosinusse in Sinusse mit entgegengesetztem Vorzeichen zu verwandeln. Die Grösse $n\left(\frac{d\delta z}{d\varepsilon}\right)_0$ bekommt man ebenso, und hierauf wird

$$\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0 = n\left(\frac{d\delta z}{d\varepsilon}\right)_0 \frac{a_0}{r_0}$$

Wenn die Säcularänderungen merklich sind, so muss in den Differentialcoefficienten darauf Rücksicht genommen werden. Dieses ist in unserem Beispiel, ausser in der ersten Abtheilung $i' = 0$, nur in den Coefficienten des Arguments $1,-3$ der Fall. Wenn

$$\begin{aligned} n\delta z \text{ oder } \delta v \text{ oder } \delta u = \; & a\sin(1,-3) + a'nt\sin(1,-3) \\ & + b\cos(1,-3) + b'nt\cos(1,-3) \end{aligned}$$

ist, so wird mit ausreichender Genauigkeit

$$\begin{aligned} n\left(\frac{d\delta z}{d\varepsilon}\right) \text{ oder } \left(\frac{d\delta v}{d\varepsilon}\right) \text{ oder } \left(\frac{d\delta u}{d\varepsilon}\right) = \; & (a(1-3\mu)+b')\cos(1,-3) + a'(1-3\mu)nt\cos(1,-3) \\ & + (-b(1-3\mu)+a')\sin(1,-3) - b'(1-3\mu)nt\sin(1,-3) \end{aligned}$$

in welchen, um die mit 0 versehenen Grössen zu erhalten, die mit $nt$ multiplicirten Glieder weggelassen werden müssen. Auf dieselbe Art bekommt man die Differentiale irgend eines anderen Gliedes. Die Differentiale der Abtheilung $i' = 0$ habe ich in der folgenden Tafel zusammengestellt, jedoch die mit $n^2t^2$ multiplicirten Glieder, da sie für den Gebrauch, welcher hier davon gemacht werden wird, unmerklich sind, weggelassen.

| $i', i'\mu$ | $\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)$ | | $2\left(\frac{d\delta v}{d\varepsilon}\right)$ | | $\left(\frac{du}{\cos i\, d\varepsilon}\right)$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | cos | sin | −sin | cos | cos | −sin |
| 0,0 | −3″.0659<br>−0.01645$nt$ | | | +0″.04<br>+0.00009$nt$ | +0″.04<br>+0.00048$nt$ | |
| 1,0 | +1.08<br>−0.38748$nt$ | +1″.50<br>+0.47681$nt$ | −0″.30<br>+0.38662$nt$ | −1.00<br>−0.47556$nt$ | −0.19<br>−0.03041$nt$ | −0″.02<br>+0.00607$nt$ |
| 2,0 | +0.78<br>−0.01481$nt$ | +3.60<br>+0.01068$nt$ | −0.58<br>+0.01223$nt$ | −3.03<br>−0.00947$nt$ | −0.52<br>−0.02597$nt$ | +0.27<br>+0.03225$nt$ |
| 3,0 | +0.01<br>−0.00047$nt$ | +0.06<br>+0.00006$nt$ | −0.03<br>+0.00063$nt$ | −0.21<br>−0.00039$nt$ | —<br>— | —<br>— |

Digitized by Google

93.

Um nun die Theile der Constanten zu erhalten, die das Quadrat der störenden Kraft den in der Abhandlung (II) ermittelten Werthen derselben hinzufügt, müssen auf die im §. 5 (II) erklärte Art zuerst die Grössen $(n\delta z)_0$, $\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0$, etc. berechnet werden. Hiezu können dieselben im Art. 61 (II) benutzten Werthe von $\varepsilon_0$ und $c'$ angewandt werden, aber die dort berechneten Werthe dieser Grössen müssen mit dem Unterschied des dort der Rechnung zu Grunde gelegten Werthes von $c$ von dem durch dieselbe erhaltenen Werthe dieser Grösse verbessert werden. Dieser Rechnung wurde zu Grunde gelegt

$$c_0 = 19^\circ\ 31'\ 43''6$$

und erhalten wurde

$$c = 19^\circ\ 33'\ 27''9$$

Da wenigstens in diesem Beispiel der Unterschied

$$c - c_0 = +\ 1'\ 44''3$$

sehr klein ist, so braucht die genannte Verbesserung sich nur auf die grössten Störungsglieder zu erstrecken, und ist leicht zu erhalten. Es ergaben sich nun die folgenden numerischen Werthe,

$$\begin{aligned}
(n\delta z)_0 &= -\ 28''61 - 0''50 = -\ 29''11\\
\left(\frac{d\delta z}{dt}\right)_0 &= -\ 20.27 - 0.38 = -\ 20.65\\
2\ (\delta v)_0 &= +\ 17.71 + 0.43 = +\ 18.14\\
2\left(\frac{d\delta v}{d\varepsilon}\right)_0 &= +\ 7.11 - 0.87 = +\ 6.24\\
\left(\frac{\delta u}{\cos i}\right)_0 &= +\ 0.20 - 0.04 = +\ 0.16\\
\left(\frac{d\delta u}{\cos i\ d\varepsilon}\right)_0 &= +\ 1.07 - 0.05 = +\ 1.02
\end{aligned}$$

wozu noch aus Art. 77 das constante Glied in dem dort gegebenen Ausdruck von $\frac{d\delta z}{dt}$, nemlich

$$Z_1 = -\ 3''07$$

kommt. Von den zwei Theilen, in welchen ich die vorstehenden Grössen angegeben habe, enthält der erste das Resultat der Substitution von $\varepsilon_0$ und $c'$ in die vorhergehenden Glieder der zweiten Ordnung, und der zweite die Verbesserung der in der ersten Annäherung in dem Art. 61 (II) gefundenen Werthe dieser Grössen. Man sieht, dass diese sehr klein sind. Durch Anwendung der Ausdrücke des Art. 54 (II) auf die obigen numerischen Werthe ergab sich

Digitized by Google

$$\begin{aligned} k &= +\ 0''.25 \\ k_1 &= +\ 16.75 \\ k_2 &= +\ 13.23 \\ l &= -\ 1.00 \\ l_1 &= +\ 0.24 \\ \delta c &= +\ 35.63 \end{aligned}$$

die nicht ganz unbedeutend sind. Substituirt man diese in die Ausdrücke des Art. 76 für $nz$, $\nu$ und $\frac{u}{\cos i}$, so ergeben sich folgende Glieder

$$\begin{aligned} nz &= +\ 35''.63 \quad -\ 0''.0149\,t \\ &\quad +\ 18.20\sin\varepsilon - 14.97\cos\varepsilon \\ &\quad -\ 0.02\sin 2\varepsilon - 1.48\cos 2\varepsilon \\ 2\delta\nu &= +\ 5''.36 \\ &\quad -\ 17.53\cos\varepsilon - 14''.62\sin\varepsilon \\ \frac{\delta u}{\cos i} &= +\ 0''.45 \\ &\quad -\ 1.20\sin\varepsilon + 0''.19\cos\varepsilon \end{aligned}$$

die an die Stelle der im Art. 91 angegebenen gleichartigen Glieder treten.

## 94.

Fügen wir jetzt die im Vorhergehenden berechneten Glieder zweiter Ordnung den in der Abhandlung (II) berechneten Gliedern erster Ordnung hinzu, so ist das Resultat das folgende. Sei wie immer

$$nz = g + n\delta z$$

dann wird

$$g = 19^{\circ}34'3''.5 + 858''.2797\,t - 0''.432\,t_1^2$$

wo der Coefficient von $t$ der wahre Werth der mittleren täglichen Bewegung ist, insofern der diesen Rechnungen zu Grunde gelegte numerische Werth von $n_0$ in der That der der Zeitepoche zukommende Werth der osculirenden mittleren Bewegung ist.

Der Coefficient von $t_1^2$ ist die Säcularänderung der mittleren Länge oder mittleren Anomalie in der Zeiteinheit, für welche hier hundert Julianische Jahre angenommen sind.

Die Coefficienten von $n\delta z$, $\nu$ und $\frac{u}{\cos i}$ habe ich in der folgenden Tafel zusammengestellt.

Digitized by Google

| | $n\delta z$ | | $v$ | | $\frac{u}{\cos i}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $\varepsilon$, $\mu\varepsilon$ | sin | cos | cos | sin | sin | cos |
| 0,0 | | | $-21''.52$<br>$+0.05208nt$<br>$+0.0000231n^2t^2$ | | | $+5''.72$<br>$-0.10725nt$<br>$+0.0000949n^2t^2$ |
| 1,0 | $+826''.80$<br>$-1.18446nt$<br>$-0.0004433n^2t^2$ | $-679''.60$<br>$-3''.06350nt$<br>$+0.0000956n^2t^2$ | $-412.89$<br>$+0.59427nt$<br>$+0.0002229n^2t^2$ | $-339''.23$<br>$-1''.53436nt$<br>$+0.0000477n^2t^2$ | $-411''.47$<br>$-7''.88639nt$<br>$-0.0000801n^2t^2$ | $-22.08$<br>$+1.38984nt$<br>$-0.0004627n^2t^2$ |
| 2,0 | $-19.63$<br>$+0.01782nt$<br>$+0.0000003n^2t^2$ | $+13.38$<br>$+0.05965nt$<br>$+0.0000042n^2t^2$ | $+1.64$<br>$+0.00306nt$<br>$+0.0000037n^2t^2$ | $-0.12$<br>$-0.00237nt$<br>$+0.0000026n^2t^2$ | $-0.52$<br>$-0.01303nt$<br>$+0.0000240n^2t^2$ | $-0.24$<br>$+0.01615nt$<br>$+0.0000468n^2t^2$ |
| 3,0 | $+0.10$<br>$+0.00015nt$<br>$+0.0000002n^2t^2$ | $-0.08$<br>$+0.00013nt$<br>$-0.0000001n^2t^2$ | $-0.05$<br>$+0.00011nt$<br>$+0.0000002n^2t^2$ | $-0.09$<br>$-0.00007nt$<br>$+0.0000001n^2t^2$ | $-0.02$<br>$-0.00024nt$<br>$+0.0000005n^2t^2$ | $-0.04$<br>$+0.00029nt$<br>$+0.0000040n^2t^2$ |
| $-2,-1$ | $+0.30$ | $-0.18$ | $+0.21$ | $+0.04$ | $+0.08$ | $+0.04$ |
| $-1,-1$ | $-3.34$<br>$+0.00166nt$ | $+5.93$<br>$+0.00149nt$ | $-2.00$<br>$+0.00109nt$ | $-3.72$<br>$-0.00096nt$ | $+2.12$ | $+3.08$ |
| 0,-1 | $+20.44$<br>$+0.00244nt$ | $-12.35$<br>$+0.00169nt$ | $+2.44$<br>$+0.00078nt$ | $-1.04$<br>$-0.00056nt$ | $+10.47$ | $+5.98$ |
| 1,-1 | $+40.02$<br>$-0.00121nt$ | $-115.83$<br>$-0.00074nt$ | $-14.00$<br>$+0.00049nt$ | $-40.57$<br>$-0.00036nt$ | $-7.98$ | $-5.06$ |
| 2,-1 | $+0.30$<br>$-0.00142nt$ | $+2.09$<br>$-0.00028nt$ | $-0.62$<br>$+0.00075nt$ | $+0.04$<br>$-0.00018nt$ | $-5.08$ | $-0.71$ |
| 3,-1 | $-0.03$ | $-0.76$ | $0.00$ | $-0.65$ | $+0.15$ | $-0.01$ |
| 4,-1 | $+0.01$ | $+0.04$ | $-0.01$ | $+0.02$ | $+0.02$ | $0.00$ |
| $-2,-2$ | $+0.02$ | $-0.01$ | $+0.02$ | $-0.01$ | $+0.03$ | $0.00$ |
| $-1,-2$ | $-0.25$ | $+0.49$ | $+0.02$ | $-0.58$ | $-0.05$ | $+0.16$ |
| 0,-2 | $+11.09$<br>$+0.00555nt$ | $+12.64$<br>$-0.00342nt$ | $+5.75$<br>$+0.00218nt$ | $-6.06$<br>$+0.00133nt$ | $+8.94$ | $-4.48$ |
| 1,-2 | $-176.33$<br>$+0.01679nt$ | $-167.15$<br>$-0.01184nt$ | $+44.32$<br>$-0.00223nt$ | $-38.91$<br>$-0.00144nt$ | $-12.85$ | $+11.59$ |
| 2,-2 | $-189.31$<br>$-0.00276nt$ | $-133.12$<br>$+0.00145nt$ | $+142.97$<br>$+0.00146nt$ | $-79.69$<br>$+0.00214nt$ | $-5.13$ | $+3.89$ |
| 3,-2 | $+3.23$<br>$-0.00049nt$ | $+3.45$<br>$+0.00179nt$ | $+0.77$<br>$+0.00021nt$ | $+0.14$<br>$+0.00080nt$ | $+0.52$ | $-0.90$ |
| 4,-2 | $+0.30$ | $+0.08$ | $-0.23$ | $+0.08$ | $-0.01$ | $+0.03$ |
| $-1,-3$ | $+0.41$ | $+0.25$ | $-0.01$ | $-0.05$ | $-0.02$ | $+0.06$ |
| 0,-3 | $-18.87$<br>$+0.00289nt$ | $-10.38$<br>$+0.00044nt$ | $-11.05$<br>$+0.00118nt$ | $+5.87$<br>$-0.00062nt$ | $-6.55$<br>$+0.00462nt$ | $+4.09$<br>$+0.01456nt$ |
| 1,-3 | $-627.22$<br>$-0.01911nt$ | $-653.00$<br>$-0.37649nt$ | $-48.53$<br>$-0.00179nt$ | $+20.15$<br>$+0.01100nt$ | $+2.74$<br>$-0.01096nt$ | $+12.49$<br>$-0.00189nt$ |
| 2,-3 | $+749.27$<br>$+0.01164nt$ | $+0.67$<br>$+0.04121nt$ | $-360.62$<br>$-0.00566nt$ | $-0.44$<br>$+0.02032nt$ | $-39.02$<br>$-0.00098nt$ | $-95.01$<br>$+0.01691nt$ |
| 3,-3 | $+3.87$<br>$-0.00230nt$ | $-14.79$<br>$-0.00680nt$ | $-13.38$<br>$+0.00094nt$ | $-10.29$<br>$-0.00243nt$ | $-0.69$<br>$-0.01829nt$ | $-1.04$<br>$+0.00288nt$ |
| 4,-3 | $-0.42$<br>$-0.00013nt$ | $+0.04$<br>$+0.00002nt$ | $-0.11$<br>$+0.00011nt$ | $-0.30$<br>$-0.00011nt$ | $+0.20$<br>$-0.00059nt$ | $+0.21$<br>$+0.00040nt$ |
| 5,-3 | $-0.07$ | $+0.10$ | $+0.06$ | $+0.09$ | | |
| 0,-4 | $-0.23$ | $-0.15$ | $-0.20$ | $+0.07$ | $-0.20$ | $-0.04$ |
| 1,-4 | $-2.49$ | $+0.70$ | $-1.17$ | $-0.06$ | $+0.36$ | $+1.17$ |
| 2,-4 | $+31.16$ | $-4.05$ | $-11.46$ | $-2.78$ | $-1.10$ | $-2.91$ |
| 3,-4 | $+5.43$ | $-17.34$ | $-4.03$ | $-11.07$ | $-3.20$ | $+0.47$ |
| 4,-4 | $+4.40$ | $+4.77$ | $-1.27$ | $+3.47$ | $+0.25$ | $+0.05$ |
| 5,-4 | $+0.10$ | $-0.02$ | $-0.11$ | $+0.10$ | $-0.09$ | $+0.05$ |
| 6,-4 | $-0.03$ | $-0.04$ | $+0.03$ | $-0.04$ | | |
| 0,-5 | $-0.01$ | $-0.03$ | $-0.02$ | $+0.01$ | $-0.03$ | $0.00$ |
| 1,-5 | $-0.43$ | $+0.60$ | $-0.29$ | $-0.19$ | $-0.05$ | $+0.43$ |
| 2,-5 | $+18.14$ | $+3.50$ | $-2.93$ | $-0.24$ | $-0.46$ | $-0.48$ |

Digitized by Google

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 3,−5 | +0.19 | −12.99 | −0.57 | −7.22 | −3.07 | +2.37 |
| 4,−5 | +2.85 | +2.07 | −1.84 | +1.48 | +0.19 | −0.63 |
| 5,−5 | −1.29 | +0.01 | +1.06 | +0.05 | −0.05 | +0.07 |
| 6,−5 | −0.04 | +0.04 | +0.07 | +0.04 | −0.01 | −0.03 |
| 1,−6 | +0.26 | −0.14 | +0.18 | +0.14 | +0.07 | −0.29 |
| 2,−6 | +19.52 | +1.47 | +1.10 | +0.35 | −0.31 | +0.18 |
| 3,−6 | −4.18 | +12.46 | +1.88 | +5.75 | +1.82 | −2.48 |
| 4,−6 | +2.32 | +0.19 | −1.25 | +0.37 | −0.25 | −0.67 |
| 5,−6 | −0.85 | +0.55 | +0.64 | +0.43 | +0.15 | +0.11 |
| 6,−6 | +0.11 | −0.38 | −0.08 | −0.32 | −0.02 | −0.03 |
| 7,−6 | −0.01 | −0.02 | 0.00 | −0.03 | +0.01 | 0.00 |
| 2,−7 | +0.08 | −0.07 | +0.04 | +0.05 | −0.06 | −0.02 |
| 3,−7 | −0.57 | +1.77 | +0.12 | +0.58 | +0.14 | −0.14 |
| 4,−7 | +0.79 | +0.22 | −0.18 | +0.21 | −0.20 | −0.24 |
| 5,−7 | −0.27 | +0.39 | +0.21 | +0.27 | +0.16 | 0.00 |
| 6,−7 | −0.10 | −0.34 | +0.08 | −0.28 | −0.05 | +0.03 |
| 7,−7 | +0.11 | −0.07 | −0.10 | +0.05 | +0.01 | 0.00 |
| 2,−8 | 0.00 | −0.01 | 0.00 | +0.02 | | |
| 3,−8 | −0.58 | +1.43 | +0.03 | +0.21 | +0.05 | −0.01 |
| 4,−8 | +0.79 | +0.35 | −0.14 | +0.22 | −0.16 | −0.18 |
| 5,−8 | −0.10 | +0.16 | +0.08 | +0.11 | +0.07 | −0.03 |
| 6,−8 | −0.11 | −0.13 | +0.08 | −0.11 | −0.02 | +0.05 |
| 7,−8 | +0.13 | 0.00 | −0.11 | 0.00 | 0.00 | −0.02 |
| 8,−8 | −0.03 | +0.03 | +0.03 | +0.03 | | |
| 3,−9 | −0.45 | +0.57 | −0.02 | −0.06 | | |
| 4,−9 | −0.61 | −0.33 | +0.27 | −0.15 | | |
| 5,−9 | −0.04 | +0.06 | +0.04 | +0.04 | | |
| 6,−9 | −0.04 | −0.01 | +0.03 | −0.03 | | |
| 7,−9 | +0.06 | −0.03 | −0.05 | −0.02 | | |
| 8,−9 | −0.02 | +0.05 | +0.01 | +0.04 | | |
| 4,−10 | −0.11 | −0.08 | +0.03 | −0.02 | | |
| 5,−10 | −0.03 | +0.05 | +0.03 | +0.03 | | |
| 6,−10 | −0.02 | −0.02 | +0.01 | −0.02 | | |
| 7,−10 | +0.03 | −0.02 | −0.02 | −0.01 | | |
| 8,−10 | 0.00 | +0.03 | 0.00 | +0.02 | | |

Hiezu kommen noch die folgenden Ausdrücke des Art. 80

$$\Gamma = +0.00241\frac{nt}{\cos i}$$

$$\delta_2 u = \begin{Bmatrix} -0.0000022 \\ -0.0001502\sin\varepsilon + 0.0000265\cos\varepsilon \end{Bmatrix} n^2t^2\sin i\cos(\pi-\theta)$$

$$+ \begin{Bmatrix} 0.0000004 \\ +0.0000265\sin\varepsilon - 0.0000047\cos\varepsilon \end{Bmatrix} n^2t^2\sin i\sin(\pi-\theta)$$

die mit den obigen vereinigt werden können, wenn die Wahl der Fundamentalebene getroffen worden ist, wodurch die für $i$ und $\pi-\theta$ zu substituirenden numerischen Werthe gegeben werden. Da für die Egeria mit einer hier jedenfalls ausreichenden Genauigkeit in Bezug auf die Ekliptik

$$i = 16°33'$$
$$\theta = 43\ 17$$
$$\pi = 119\ 12$$

ist, und hieraus in Bezug auf den Aequator

$$i = 37°10'$$
$$\pi-\theta = 102\ 46$$

folgt, so werden die obigen Ausdrücke

Digitized by Google

1) wenn man die Ekliptik zur Fundamentalebene wählt,

$$\Gamma = +\,0''.00251\,nt$$
$$\delta_2 u = \quad 0.0000000\,n^2t^2$$
$$- 0.0000031\,n^2t^2 \sin\varepsilon + 0''.0000005\,n^2t^2\cos\varepsilon$$

2) wenn man den Aequator zur Fundamentalebene wählt,

$$\Gamma = +\,0''.00302\,nt$$
$$\delta_2 u = +\,0''.0000005\,n^2t^2$$
$$+ 0.0000357\,n^2t^2\sin\varepsilon - 0''.0000063\,n^2t^2\cos\varepsilon$$

Es kommen ferner noch die im Art. 59 (II) gegebenen Werthe der vom Saturn und Mars bewirkten Störungen hinzu, von welchen jedoch die Abtheilung $i=0$ weggelassen werden muss, weil die Glieder dieser Abtheilung den vorstehenden Ausdrücken schon einverleibt worden sind. Da jene Saturn- und Marsstörungen unverändert dieselben bleiben, wie a. a. O., so habe ich ihre Wiederholung hier für unnöthig gehalten.

## §. 8. Verwandlung der elliptischen Elemente.

### 95.

Es treten manchmal Fälle ein, in welchen es nothwendig wird, die für einen gewissen Zeitpunkt geltenden osculirenden Elemente in andere zu verwandeln, die einem andern, gegebenen Zeitpunkt zukommen, und ich werde daher hier die Aufgabe lösen, das eine dieser Systeme durch die gegebenen Störungen in das andere zu verwandeln. Ich könnte hiefür auf No. 800 der Astr. Nachr. verweisen, wo ich schon eine Auflösung dieser Aufgabe gegeben habe, allein um in dieser Abhandlung keine Lücke zu lassen, und weil hier einige Grössen anders sind, und anders bezeichnet worden sind wie dort, werde ich die Auflösung dieser Aufgabe mit einem Paar kleiner Veränderungen in der äusseren Form hier aufnehmen. Ich werde sie hier wie dort erst strenge lösen, und dann eine blos die ersten und zweiten Potenzen der störenden Kräfte berücksichtigende Auflösung aus jener ableiten.

### 96.

Es sollen wie vorher $a_0$, $n_0$, $e_0$, etc. die gegebenen, dem Zeitpunkt $t=0$ zukommenden osculirenden Elemente bedeuten, und mit $a_1$, $n_1$, $e_1$, etc. die gesuchten, dem Zeitpunkt $t_1$ zukommenden bezeichnet werden. Die

Digitized by Google

für den letzteren Zeitpunkt geltenden übrigen Grössen werde ich auch, wo es nöthig ist, unten mit einem Strich versehen. Wenn nun die Störungen auf die Art, die hier erklärt worden ist, ausgedrückt sind, so erhalten wir, nachdem in den Ausdrücken für $n_0 z$, $\nu$, $i$, $\theta$, $\sigma$ die dem Zeitpunkt $t_1$ zukommenden Werthe von $\varepsilon$ und $c'$ substituirt worden sind, die Gleichungen

$$\begin{aligned}
(n_0 z)_1 &= \overline{\varepsilon} - e_0 \sin \overline{\varepsilon} \\
\overline{r} \cos \overline{f} &= a_0 \cos \overline{\varepsilon} - a_0 e_0 \\
\overline{r} \sin \overline{f} &= a_0 \cos \varphi_0 \sin \overline{\varepsilon} \\
v &= \overline{f} + \pi_0 \\
r &= \overline{r}(1 + \nu_1) \\
a_0^3 n_0^2 &= k^2(1 + m) \\
\cos b_1 \sin (l_1 - \theta_1) &= \cos i_1 \sin (v - \sigma_1) \\
\cos b_1 \cos (l_1 - \theta_1) &= \cos (v - \sigma_1) \\
\sin b_1 &= \sin i_1 \sin (v - \sigma_1)
\end{aligned}$$

In der That sind im Vorhergehenden statt der Ausdrücke für $i$, $\theta$, $\sigma$ die für $u$, $\frac{du}{ds}$, $\Gamma$ ermittelt worden, allein die Abhängigkeit der letzteren von den ersteren ist entwickelt worden, und wir können daher jene statt dieser als durch das Vorhergehende gegeben betrachten. Wir kommen durch diese Transmutation auf eine einfachere Auflösung unserer Aufgabe.

Da $a_1$, $n_1$, etc. osculirende Elemente sind, so erhalten wir anderentheils die folgenden Gleichungen,

$$\begin{aligned}
n_1 t_1 + c_1 &= \varepsilon - e_1 \sin \varepsilon \\
r \cos f &= a_1 \cos \varepsilon - a_1 e_1 \\
r \sin f &= a_1 \cos \varphi_1 \sin \varepsilon \\
v_1 &= f + \pi_1 \\
a_1^3 n_1^2 &= k^2(1 + m) \\
\cos b_1 \sin (l_1 - \theta_1) &= \cos i_1 \sin (v_1 - \theta_1) \\
\cos b_1 \cos (l_1 - \theta_1) &= \cos (v_1 - \theta_1) \\
\sin b_1 &= \sin i_1 \sin (v_1 - \theta_1)
\end{aligned}$$

zu welchen Gleichungen ich die Voraussetzung stelle, dass $c_1$ so bestimmt sei, dass man, um in der That die Werthe von $l_1$, $b_1$ und $r_1$ aus den vorstehenden Gleichungen zu erhalten, darin $t_1 = 0$ setzen muss.

Digitized by Google

Um die drei letzten Gleichungen dieses Systems mit den drei letzten Gleichungen des vorhergehenden Systems identisch zu machen, führe ich wieder unter der Bezeichnung $\chi_1$ den Bogen ein, welcher sich zur Zeit $t_1$ in der Ebene der $XY$ (S. §. 1 (I)) von der positiven $X$ Achse bis zum Perihel erstreckt. Es wird hiedurch

$$\chi_1 - \sigma_1 = \pi_1 - \theta_1 \tag{32}$$

und zufolge des Art. 18 des §. 3 (I)

$$v = f + \chi_1$$

Hieraus folgt

$$v_1 - \theta_1 = v - \sigma_1$$

wodurch die Identität der genannten Gleichungen dargethan ist.

## 97.

Da $v$ und $r$ ideale Coordinaten sind, so geben die Gleichungen des vor. Art. einestheils

$$\frac{dv}{dt} = \frac{a_0^2 \cos \varphi_0}{\overline{r}^2} \frac{d(n_0 z)_1}{dt}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{a_0 e_0 \sin \overline{f}}{\cos \varphi_0} \frac{d(n_0 z)_1}{dt} (1 + \nu_1) + \overline{r} \frac{d\nu_1}{dt}$$

und anderntheils

$$\frac{dv}{dt} = \frac{a_1^2 n_1 \cos \varphi_1}{r^2}$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{a_1 n_1 e_1 \sin f}{\cos \varphi_1}$$

Hieraus folgen die beiden Gleichungen

$$\begin{cases} \frac{a_1^2 n_1 \cos \varphi_1}{r^2} = \frac{a_0^2 \cos \varphi_0}{\overline{r}^2} \frac{d(n_0 z)_1}{dt} \\ \frac{a_1 n_1 e_1 \sin f}{\cos \varphi_1} = \frac{a_0 e_0 \sin \overline{f}}{\cos \varphi_0} \frac{d(n_0 z)_1}{dt} (1 + \nu_1) + \overline{r} \frac{d\nu_1}{dt} \end{cases} \tag{33}$$

Setzt man wie früher

$$h_0 = \frac{a_0 n_0}{\cos \varphi_0}; \quad h_1 = \frac{a_1 n_1}{\cos \varphi_1} \tag{34}$$

woraus vermittelst der Gleichung $a_0^3 n_0^2 = a_1^3 n_1^2 = k^2(1+m)$

$$a_0^2 n_0 \cos \varphi_0 = \frac{k^2(1+m)}{h_0}; \quad a_1^2 n_1 \cos \varphi_1 = \frac{k^2(1+m)}{h_1}$$

folgt, so giebt in Verbindung mit $r = \overline{r}(1+\nu_1)$ die erste der Gleichungen (33)

$$h_1 = \frac{h_0}{\frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt} (1+\nu_1)^2} \tag{35}$$

Digitized by Google

die mit früher in diesen Abhandlungen vorgekommenen Gleichungen identisch ist, und aus welcher man $h_1$ berechnen kann. Durch die eben eingeführten Grössen $h_0$ und $h_1$, sowie durch Hülfe der Gleichungen

$$\frac{1}{r} = \frac{1+e_1\cos f}{a_1\cos^2\varphi_1}; \quad \frac{1}{\overline{r}} = \frac{1+e_0\cos\overline{f}}{a_0\cos^2\varphi_0}$$

lassen sich die Gleichungen (33) leicht in die folgenden verwandeln,

$$h_1(1+e_1\cos f) = h_0(1+e_0\cos\overline{f})\frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt}(1+\nu_1)$$
$$h_1 e_1\sin f \qquad = h_0 e_0\sin\overline{f}\frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt}(1+\nu_1) + \overline{r}\frac{d\nu_1}{dt}$$

und eliminirt man hieraus $h_1$ durch (35), so ergiebt sich

$$1+e_1\cos f = (1+e_0\cos\overline{f})\left(\frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt}\right)^2(1+\nu_1)^3$$
$$e_1\sin f = e_0\sin\overline{f}\left(\frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt}\right)^2(1+\nu_1)^3 + \frac{r}{h_0}\left(\frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt}\right)\left(\frac{d\nu_1}{dt}\right)(1+\nu_1)^2$$

Um diese Gleichungen zusammenzuziehen, setze ich

$$\alpha = \left(\frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt}\right)^2(1+\nu_1)^3 - 1; \quad \beta = \frac{\overline{r}}{h_0}\left(\frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt}\right)\left(\frac{d\nu_1}{dt}\right)(1+\nu_1)^2$$

wodurch sie in

$$e_1\cos f = e_0\cos\overline{f} + \alpha(1+e_0\cos\overline{f})$$
$$e_1\sin f = e_0\sin\overline{f} + \alpha e_0\sin f + \beta$$

übergehen, und $\alpha$ und $\beta$ kleine Grössen von der Ordnung der störenden Kräfte sind. Die Gleichungen

$$v = \overline{f} + \pi_0; \quad v = f + \chi_1$$

des vor. Art. geben aber

$$\chi_1 - \pi_0 = \overline{f} - f$$

und daher bekommt man aus den beiden vorstehenden Gleichungen

$$\left.\begin{aligned} e_1\sin(\chi_1-\pi_0) &= \alpha\sin\overline{f} - \beta\cos\overline{f} \\ e_1\cos(\chi_1-\pi_0) &= e_0 + \alpha(\cos\overline{f}+e_0) + \beta\sin\overline{f} \end{aligned}\right\} \qquad (36)$$

die zur strengen Bestimmung von $e_1$ und $\chi_1$ dienen.

## 98.

Wenn man aus den Ausdrücken (34) $a_1$ und $a_0$ vermittelst der Gleichung $a_0^3 n_0^2 = a_1^3 n_1^2$ eliminirt, so bekommt man

$$n_1 = n_0\left(\frac{h_1\cos\varphi_1}{h_0\cos\varphi_0}\right)^3 \qquad (37)$$

eliminirt man dagegen $n_1$ und $n_0$, so ergiebt sich

$$a_1 = a_0\left(\frac{h_0\cos\varphi_0}{h_1\cos\varphi_1}\right)^2 \qquad (37^*)$$



Digitized by Google

Setzt man zur Abkürzung

$$\eta = \alpha \sin \bar{f} - \beta \cos \bar{f}$$
$$\xi = \alpha (\cos \bar{f} + e_0) + \beta \sin \bar{f}$$

so geben die (36)

$$\cos^2 \varphi_1 = \cos^2 \varphi_0 \left\{ 1 - \frac{2 e_0 \xi}{\cos^2 \varphi_0} - \frac{\xi^2 + \eta^2}{\cos^2 \varphi_0} \right\}$$

Durch diese und (37) oder bez. (37*) erhält man

$$n_1 = n_0 \frac{\left\{ 1 - \frac{2 e_0 \xi}{\cos^2 \varphi_0} - \frac{\xi^2 + \eta^2}{\cos^2 \varphi_0} \right\}^{\frac{3}{2}}}{\left( \frac{d(n_0 a_0^2)}{n_0 dt} \right)^3 (1 + \nu_1)^6} \tag{38}$$

und

$$a_1 = a_0 \frac{\left( \frac{d(n_0 a_0^2)}{n_0 dt} \right)^2 (1 + \nu_1)^4}{1 - \frac{2 e_0 \xi}{\cos^2 \varphi_0} - \frac{\xi^2 + \eta^2}{\cos^2 \varphi_0}} \tag{38*}$$

Man braucht aber nur durch einen dieser vier Ausdrücke entweder $n_1$ oder $a_1$ zu berechnen, denn man erhält darauf

$$\text{entweder } a_1 = \sqrt[3]{\left(\frac{k}{n_1}\right)^2}, \quad \text{oder } n_1 = \frac{k}{a_1^{\frac{3}{2}}}$$

die einfacher sind wie jene.

## 99.

Das vierte Element $c_1$ kann man direct auf folgende Art finden. Nachdem $\chi_1$ durch (36) berechnet worden ist, erhält man

$$f = \bar{f} - \chi_1 + \pi_0$$

und aus $f$ und dem auch schon als berechnet vorausgesetzten Werthe von $e_1$ oder $\varphi_1$ ergiebt sich $\varepsilon$ aus

$$\operatorname{tg} \varepsilon = \frac{\sin f \cos \varphi_1}{\cos f + \sin \varphi_1}$$

worauf man $c_1$ durch

$$c_1 = \varepsilon - e_1 \sin \varepsilon$$

erhält.

## 100.

Wenn man $u$, $p$, $q$ auf die Zeit $t_1$ bezieht, so können wir zufolge des Art. 26 (I) setzen

$$\frac{u_1}{\cos i_1} = \frac{\bar{r}}{a_0} q_1 \sin (\bar{f} + \pi_0 - \theta_0) - \frac{\bar{r}}{a_0} p_1 \cos (\bar{f} + \pi_0 - \theta_0)$$

und hieraus folgt

Digitized by Google

$$\frac{du_1}{\cos i_0\, dt} = \frac{h_0}{a_0} q_1 \{\cos(\overline{f}+\pi_0-\theta_0) + e_0 \cos(\pi_0-\theta_0)\}\left(\frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt}\right) + \frac{h_0}{a_0} p_1 \{\sin(\overline{f}+\pi_0-\theta_0) + e_0 \sin(\pi_0-\theta_0)\}\left(\frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt}\right)$$

Durch die Elimination ergiebt sich hieraus

$$\left.\begin{aligned} p_1 = &-\frac{u_1}{\cos i_0 \cos^2 \varphi_0}\{\cos(\overline{f}+\pi_0-\theta_0) + e_0\cos(\pi_0-\theta_0)\} \\ &+ \frac{\overline{r}\frac{du_1}{dt}}{\left(\frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt}\right) h_0 \cos i_0 \cos^2\varphi_0} \sin(\overline{f}+\pi_0-\theta_0) \\ q_1 = &\ \frac{u_1}{\cos i_0 \cos^2 \varphi_0}\{\sin(\overline{f}+\pi_0-\theta_0) + e_0 \sin(\pi_0-\theta_0)\} \\ &+ \frac{\overline{r}\frac{du_1}{dt}}{\left(\frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt}\right) h_0 \cos i_0 \cos^2\varphi_0} \cos(\overline{f}+\pi_0-\theta_0) \end{aligned}\right\} \quad (39)$$

Von der anderen Seite ist aber

$$\begin{aligned} \sin i_1 \sin(\sigma_1-\theta_0) &= p_1 \cos i_0 \\ \sin i_1 \cos(\sigma_1-\theta_0) &= \sin i_0 + q_1 \cos i_0 \end{aligned}$$

Substituirt man daher, und führt die durch die folgenden Gleichungen zu bestimmenden Hülfsgrössen $\lambda$ und $l$ ein,

$$\left.\begin{aligned} \lambda \sin l &= \sin \overline{f} \\ \lambda \cos l &= \cos \overline{f} + e_0 \end{aligned}\right\} \quad (40)$$

so wird

$$\left.\begin{aligned} \sin i_1 \sin(\sigma_1-\theta_0) = &-\frac{u_1}{\cos^2\varphi_0}\lambda\cos(l+\pi_0-\theta_0) + \frac{\overline{r}\frac{du_1}{dt}}{\left(\frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt}\right) h_0 \cos^2\varphi^0} \sin(\overline{f}+\pi_0-\theta_0) \\ \sin i_1 \cos(\sigma_1-\theta_0) = \sin i_0 + &\frac{u_1}{\cos^2\varphi_0}\lambda \sin(l+\pi_0-\theta_0) + \frac{\overline{r}\frac{du_1}{dt}}{\left(\frac{d(n_0 z)_1}{n_1 dt}\right) h_0 \cos^2\varphi_0} \cos(\overline{f}+\pi_0-\theta_0) \end{aligned}\right\} (41)$$

welches die strengen Gleichungen für $i_1$ und $\sigma_1$ sind. Sind diese berechnet, so ergiebt sich $\theta_1$ aus dem Quotienten der beiden letzten Gleichungen (20) (I), nemlich aus

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\theta_1-\theta_0-I_1) = \frac{\cos\frac{1}{2}(i_1-i_0)}{\cos\frac{1}{2}(i_1+i_0)} \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}(\sigma_1-\theta_0) \quad (42)$$

und endlich erhält man aus (32)

$$\pi_1 = \chi_1 - \sigma_1 + \theta_1 \quad (43)$$

womit die Aufgabe gelöst ist.



Digitized by Google

## 101.

Um aus dieser strengen Auflösung unserer Aufgabe eine genäherte, nur die ersten und zweiten Potenzen der störenden Kräfte berücksichtigende, Auflösung abzuleiten, nehme ich zuerst die Gleichungen (36) wieder vor, nemlich

$$\sin\varphi_1 \sin(\chi_1 - \pi_0) = \eta$$
$$\sin\varphi_1 \cos(\chi_1 - \pi_0) = \sin\varphi_0 + \xi$$

in welchen

$$\eta = \alpha \sin\overline{f} - \beta\cos\overline{f}$$
$$\xi = \alpha(\cos\overline{f} + e_0) + \beta\sin\overline{f}$$

ist. Aus diesen zieht man leicht bis auf Grössen von der Ordnung $\alpha^2$ und $\beta^2$

$$\varphi_1 = \varphi_0 + \varrho\frac{\xi}{\cos\varphi_0} + \varrho\frac{e_0\xi^2}{2\cos^2\varphi_0} + \varrho\frac{\eta^2}{2e_0\cos\varphi_0}$$
$$\chi_1 = \pi_0 + \varrho\frac{\eta}{e_0} - \varrho\frac{\xi\eta}{e_0^2}$$

wo $\xi$ und $\eta$ in Theilen des Radius ausgedrückt vorausgesetzt werden und, gleichwie im Folgenden,

$$\varrho = 206265''$$

ist. Wegen der in diesen Ausdrücken vorkommenden Divisionen durch $e_0$ ereignet sich es oft, dass die Glieder zweiter Ordnung merklich werden, wenngleich $\alpha^2$ und $\beta^2$ an sich unmerklich sind. In den Ausdrücken für $\xi$ und $\eta$ kann man die wahre Anomalie durch die excentrische ersetzen; man findet leicht, dass

$$\xi = D\alpha + E\beta$$
$$\eta = E\alpha - F\beta$$

wird, wenn man

$$(44)\qquad \left.\begin{aligned} D &= \frac{\cos^2\varphi_0\cos\overline{\varepsilon}}{1-e_0\cos\overline{\varepsilon}} \\ E &= \frac{\cos\varphi_0\sin\overline{\varepsilon}}{1-e_0\cos\overline{\varepsilon}} \\ F &= \frac{\cos\overline{\varepsilon}-e_0}{1-e_0\cos\overline{\varepsilon}} \end{aligned}\right\}$$

setzt, und wenn die Störungen so gross sind, dass es nöthig wird in $\alpha$ und $\beta$ die Quadrate und Producte derselben zu berücksichtigen, so geschieht dieses am Einfachsten auf die folgende Art. Sei vor Allem

$$\frac{d\delta z_1}{dt} = \frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt} - 1$$

Digitized by Google

und ferner

$$A = \frac{d\delta z_1}{dt} - \tfrac{1}{2}\left(\frac{d\delta z_1}{dt}\right)^2$$
$$B = 2A + 3(\nu_1 - \tfrac{1}{2}\nu_1^2)$$

wo auch vorausgesetzt ist, dass $\frac{d\delta z}{dt}$ und $\nu$ in Theilen des Radius ausgedrückt sind, dann wird bis auf Grössen dritter Ordnung

$$\alpha = B + \tfrac{1}{2}B^2$$

Setzt man ferner

$$C = 2B - A$$

und bezeichnet mit $M$ den Modul der Briggischen Logarithmen, so erhält man

$$\log \text{br}\, \beta = \tfrac{1}{2}MC + \log \text{br} \frac{d\nu_1}{d\varepsilon} + \log \text{br} \cos \varphi_0 + M\frac{e_0 E}{\cos \varphi_0}(n_0 \delta z)_1$$

*) wo auch $\frac{d\nu_1}{d\varepsilon}$ und $(n_0\delta z)_1$ in Theilen des Radius ausgedrückt werden müssen. Das letzte Glied dieses Ausdrucks wird gemeiniglich übergangen werden können. Setzt man ferner

$$b = 1 - \frac{1}{\left(\frac{d(n_0 a_1)}{n_0 dt}\right)^3 (1+\nu_1)^6}$$

und löst die rechte Seite der Gleichung (38) in eine Reihe auf, so findet man

$$n_1 = n_0 - n_0\left\{b + \frac{3e_0\xi}{\cos^2\varphi_0} - \frac{3e_0\xi}{\cos^2\varphi_0}b + \frac{9}{2}\frac{1-2e_0^2}{\cos^4\varphi_0}\xi^2 + \frac{9}{2}\frac{\eta^2}{\cos^2\varphi_0}\right\}$$

für welche Bestimmung $b$ sich durch den folgenden einfachen Ausdruck ergiebt,

$$b = C - \tfrac{1}{2}C^2$$

Die Gleichung $a_1^3 n_1^2 = a_0^3 n_0^2$ giebt ferner

$$\log \text{br}\, a_1 = \log \text{br}\, a_0 - \tfrac{3}{2}M\frac{n_1 - n_0}{n_0} + \tfrac{1}{2}M\left(\frac{n_1 - n_0}{n_0}\right)^2$$

Man kann auch erst $a_1$ und dann $n_1$ rechnen, wobei die Berechnung von $b$ überflüssig wird. Man findet leicht

$$\log \text{br}\, a_1 = \log \text{br}\, a_0 + M(B + \nu_1 - \tfrac{1}{2}\nu_1^2) + M\frac{2e_0\xi}{\cos^2\varphi_0} + M\frac{1+e_0^2}{\cos^4\varphi_0}\xi^2 + M\frac{\eta^2}{\cos^2\varphi_0}$$

und hierauf wird

$$n_1 = n_0 - \tfrac{3}{2}n_0\frac{\log \text{br}\, a_1 - \log \text{br}\, a_0}{M} + \tfrac{9}{8}n_0\left\{\frac{\log \text{br}\, a_1 - \log \text{br}\, a_0}{M}\right\}^2$$

*) Wenn $\frac{\partial\nu_1}{\partial\varepsilon}$ negativ ist, wird $\log \text{br}\, \beta$ nach dieser Formel grade ebenso berechnet, als wäre $\frac{\partial\nu_1}{\partial\varepsilon}$ positiv, aber der $\log \text{br}\, \beta$, den man bekommt, muss als zu einer negativen Zahl gehörig betrachtet werden. Nemlich $\beta$ wird negativ.

Digitized by Google

## 102.

Um $c_1$ zu entwickeln, betrachte ich die mittlere Anomalie überhaupt, die ich wieder mit $g$ bezeichnen werde, als Function der wahren Anomalie und des Excentricitätswinkels, und bekomme daher allgemein bis Grössen dritter Ordnung

$$\delta g = \left(\frac{dg}{df}\right)\delta f + \left(\frac{dg}{d\varphi}\right)\delta\varphi + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2g}{df^2}\right)\delta f^2 + \left(\frac{d^2g}{df\,d\varphi}\right)\delta f\,\delta\varphi + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2g}{d\varphi^2}\right)\delta\varphi^2$$

Die Gleichung

$$df = \frac{a^2\cos\varphi}{r^2}\,dg + \left(\frac{1}{\cos\varphi} + \frac{a\cos\varphi}{r}\right)\sin f\,d\varphi$$

giebt nun

$$\left(\frac{dg}{df}\right) = \frac{r^2}{a^2\cos\varphi}\;;\quad \left(\frac{dg}{d\varphi}\right) = -\left(\frac{r^2}{a^2\cos^2\varphi} + \frac{r}{a}\right)\sin f$$

Die Gleichung $r = \frac{a\cos^2\varphi}{1+\sin\varphi\cos f}$ giebt ferner, wenn wir $r$ als Function von $f$ und $\varphi$ betrachten,

$$\left(\frac{dr}{df}\right) = \frac{r^2\sin\varphi\sin f}{a\cos^2\varphi}$$

$$\left(\frac{dr}{d\varphi}\right) = -\frac{r^2\cos f}{a\cos\varphi} - 2\,\frac{r\sin\varphi}{\cos\varphi}$$

Durch Hülfe dieser Gleichung werden die Differentiale der vorstehenden

$$\left(\frac{d^2g}{df^2}\right) = 2\,\frac{r^3\sin\varphi\sin f}{a^3\cos^3\varphi}$$

$$\left(\frac{d^2g}{df\,d\varphi}\right) = -\frac{r^2}{a^2\cos^2\varphi}\,(2\cos\varphi + \sin\varphi)$$

$$\left(\frac{d^2g}{d\varphi^2}\right) = \frac{r^3\sin f}{a^2\cos^3\varphi}\,\{2\cos\varphi + 2\sin\varphi + (1+\sin^2\varphi)\cos f\}$$

Wenden wir diese Formeln auf unseren Fall an, und erwägen, dass

$$\delta f = f - \bar{f} = -\chi_1 + \pi_0 = -\frac{\eta}{c_0} + \frac{\xi\eta}{e_0^2}$$

$$\delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_0 = \frac{\xi}{\cos\varphi_0} + \frac{e_0\xi^2}{2\cos^2\varphi_0} + \frac{\eta^2}{2e_0\cos\varphi_0}$$

$$\delta g = c_1 - nz_1$$

ist, führen auch allenthalben die excentrische Anomalie ein, so wird

$$c_1 = nz_1 - \xi P - \eta Q + \xi^2 R + \xi\eta S - \eta^2 R\cos^2\varphi_0$$

wo

$$P = \varrho\,\frac{\sin\bar{\varepsilon}}{\cos^2\varphi_0}\,\{2 - e_0^2 - e_0\cos\bar{\varepsilon}\}$$

$$Q = \varrho\,\frac{(1-e_0\cos\bar{\varepsilon})^2}{e_0\cos\varphi_0}$$

$$R = \varrho\,\frac{\sin\bar{\varepsilon}}{2\cos^4\varphi_0}\,\{3(\cos\bar{\varepsilon} - e_0) + 2e_0\sin^2\bar{\varepsilon}\}$$

$$S = \varrho\,\frac{(1-e_0\cos\bar{\varepsilon})^2}{e_0^2\cos^2\varphi_0}\,(1 + 2e_0\cos\bar{\varepsilon})$$

Digitized by Google

103.

Ein anderes Verfahren, um $c_1$ zu finden, besteht in Folgendem. Betrachtet man erst $f$ als Function von $\varepsilon$ und $\varphi$, so findet man leicht

$$df = \frac{a\cos\varphi}{r}\,d\varepsilon + \frac{a\sin\varepsilon}{r}\,d\varphi$$

und hieraus, wenn man entgegengesetzt $\varepsilon$ als Function von $f$ und $\varphi$ betrachtet,

$$\left(\frac{d\varepsilon}{df}\right) = \frac{r}{a\cos\varphi}, \quad \left(\frac{d\varepsilon}{d\varphi}\right) = -\frac{\sin\varepsilon}{\cos\varphi}$$

Diese geben durch die Differentiation und mit Zuziehung der Ausdrücke des vor. Art. für $\left(\frac{dr}{df}\right)$ und $\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)$

$$\left(\frac{d^2\varepsilon}{df^2}\right) = \frac{er\sin\varepsilon}{a\cos^3\varphi}$$

$$\left(\frac{d^2\varepsilon}{df\,d\varphi}\right) = -\frac{r\cos\varepsilon}{a\cos^2\varphi}$$

$$\left(\frac{d^2\varepsilon}{d\varphi^2}\right) = \frac{(\cos\varepsilon - e)\sin\varepsilon}{\cos^2\varphi}$$

und da allgemein

$$\delta\varepsilon = \left(\frac{d\varepsilon}{df}\right)\delta f + \left(\frac{d\varepsilon}{d\varphi}\right)\delta\varphi + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\varepsilon}{df^2}\right)\delta f^2 + \left(\frac{d^2\varepsilon}{df\,d\varphi}\right)\delta f\,\delta\varphi + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\varepsilon}{d\varphi^2}\right)\delta\varphi^2$$

ist, so giebt die Substitution der im Vorhergehenden entwickelten Functionen

$$\varepsilon = \bar{\varepsilon} - \xi P' - \eta Q' + \xi^2 R' + \xi\eta S' + \eta^2 T'$$

wo

$$P' = \varrho\,\frac{\sin\bar{\varepsilon}}{\cos^2\varphi_0}$$

$$Q' = \varrho\,\frac{1 - e_0\cos\bar{\varepsilon}}{e_0\cos\varphi_0}$$

$$R' = P'\,\frac{\cos\bar{\varepsilon} - 2e_0}{2\cos^2\varphi_0}$$

$$S' = Q'\,\frac{\cos^2\varphi_0 + e_0\cos\bar{\varepsilon}}{e_0\cos^2\varphi_0}$$

$$T' = -\tfrac{1}{2}P'\cos\varepsilon$$

Nachdem man also zuerst den Werth von $\bar{\varepsilon}$, welcher ohnehin gebraucht wird, durch

$$(n_0 z)_1 = \bar{\varepsilon} - \varrho e_0 \sin\bar{\varepsilon}$$

auf bekannte Art berechnet hat*), giebt der vorstehende Ausdruck $\varepsilon$, und hierauf erhält man $c_1$ durch

$$c_1 = \varepsilon - \varrho e_1 \sin\varepsilon$$

*) Das von Gauss hiefür in der Theoria motus entwickelte Verfahren ziehe ich allen anderen vor, und will es daher mit anders ausgedrückter Vorschrift über die Bestimmung des Zeichens von $\lambda$ kurz angeben. Sei $E'$ ein nach Gutdünken angenommener

Digitized by Google

Ich bemerke übrigens, dass die Bestimmung von $c_1$ durch die strengen Formeln des Art. 99 kaum mehr Mühe verursacht. Man findet leicht, dass

$$\operatorname{tg} \bar{f} = \frac{E}{F}$$

wird, wo $E$ und $F$ die durch (44) gegebenen, und auch anderweitig anzuwendenden Coefficienten sind. Hat man hieraus $\bar{f}$ berechnet, so wird

$$\begin{aligned} f &= \bar{f} - \chi_1 + \pi_0 \\ \operatorname{tg} \varepsilon &= \frac{\sin f \cos \varphi_1}{\cos f + \sin \varphi_1} \\ c_1 &= \varepsilon - \varrho \sin \varphi_1 \sin \varepsilon \end{aligned}$$

wie oben.

## 104.

Es muss noch angegeben werden, wie die oben eingeführte Function

$$\frac{d\delta z_1}{dt} = \frac{d(n_0 z)_1}{n_0 dt} - 1$$

am Zweckmässigsten berechnet wird. Dem Vorhergehenden zufolge ist überhaupt $n_0 z$ in folgender Form erhalten worden,

$$n_0 z = (n)t + c + n_0 \delta z$$

wo $(n)$ die wahre mittlere Bewegung und $n_0 \delta z$ explicite Function von $\varepsilon_0$ ist. Das Differential von $n_0 \delta z$ nach $\varepsilon_0$ erhält man daher auf die im vor. § angegebene Art, nemlich durch Multiplication der Coefficienten mit den Integrationsdivisoren und durch Verwandelung von sin in cos und cos in — sin. Es wird daher zuerst

$$\frac{d.n_0 z}{n_0 dt} = \frac{(n)}{n_0} + \left(\frac{dn_0 \delta z}{d\varepsilon}\right)\left(\frac{d\varepsilon_0}{n_0 dt}\right)$$

---

Werth von $\varepsilon$, dessen Auswahl durch die Bemerkung geleitet werden kann, dass im Maximum $\bar{\varepsilon} - nz_1 = \pm \varrho e_0$ ist, und bei $\bar{\varepsilon} = \pm 90°$ stattfindet. Sei ferner $\lambda$ die durch die in den Sinustafeln angegebenen Differenzen unmittelbar zu entnehmende Veränderung des log sin $E'$ für $1''$, welcher das algebraische Zeichen von cos $E'$ vorgesetzt werden muss, und $\mu$ die auf dieselbe Weise zu entnehmende Veränderung von log $\varrho e_0$ sin $E'$ für $1''$, welche immer positiv angenommen werden muss. Rechnet man nun $E$ durch folgenden Ausdruck

$$E = (n_0 z)_1 + \varrho e_0 \sin E' + \frac{\lambda}{\mu - \lambda}\left\{nz_1 + \varrho e_0 \sin E' - E'\right\}$$

so ist $E$ ein mehr genäherter Werth von $\bar{\varepsilon}$, mit welchem die Rechnung wiederholt werden muss. Man nähert sich auf diese Weise sehr schnell und bis auf beliebige Genauigkeit dem wahren Werth von $\bar{\varepsilon}$.

Digitized by Google

und hieraus, da $(n)t + c = \varepsilon_0 - e_0 \sin \varepsilon_0$ ist

$$\frac{d\delta x_1}{dt} = \frac{(n)-n_0}{n_0} + \frac{(n)}{n_0}\left(\frac{d(n_0 \delta x)_1}{dt_0}\right) \frac{1}{1-e_0 \cos \varepsilon_0}$$

Man wird sich begnügen können, in dem letzten Gliede dieses Ausdrucks $\bar{\varepsilon}$ statt $\varepsilon_0$ anzuwenden.

## 105.

Zur Bestimmung der Elemente, von welchen die Lage der Bahn abhängt, setze ich zufolge der Gleichungen (39) und (40)

$$p_1 = -\frac{u_1 \lambda}{\cos i_0 \cos^2 \varphi_0} \cos(l + \pi_0 - \theta_0) + \frac{\frac{du_1}{dt} - \frac{du_2}{dt}\frac{d\delta z_1}{dt}}{\cos i_0 \cos \varphi_0} \sin(\overline{f} + \pi_0 - \theta_0)$$

$$q_1 = \frac{u_1 \lambda}{\cos i_0 \cos^2 \varphi_0} \sin(l + \pi_0 - \theta_0) + \frac{\frac{du_1}{dt} - \frac{du_2}{dt}\frac{d\delta z_1}{dt}}{\cos i_0 \cos \varphi_0} \cos(\overline{f} + \pi_0 - \theta_0)$$

wo

$$\lambda \sin l = E, \quad \operatorname{tg} \overline{f} = \frac{E}{F}$$
$$\lambda \cos l = D,$$

und $D$, $E$, $F$ wieder durch (44) gegeben sind, hierauf giebt die Reihenentwickelung von

$$\sin i_1 \sin(\sigma_1 - \theta_0) = p_1 \cos i_0$$
$$\sin i_1 \cos(\sigma_1 - \theta_0) = \sin i_0 + q_1 \cos i_0$$

die folgenden Ausdrücke für $i_1$ und $\sigma_1$

$$i_1 = i_0 + q_1 + p_1^2 \frac{\cos i_0}{2\varrho \sin i_0} + q_1^2 \frac{\sin i_0}{2\varrho \cos i_0}$$
$$\sigma_1 = \theta_0 + p_1 \frac{\cos i_0}{\sin i_0} - p_1 q_1 \frac{\cos^2 i_0}{\varrho \sin^2 i_0}$$

in welchen vorausgesetzt ist, dass $p_1$ und $q_1$ in Secunden ausgedrückt worden sind. Durch die Entwickelung von (42) findet man leicht

$$\theta_1 = \theta_0 + \Gamma_1 + \frac{1}{\cos i_0}(\sigma_1 - \theta_0) + \frac{\sin i_0}{2\cos^2 i_0}(i_1 - i_0)(\sigma_1 - \theta_0)$$

welche nach der Substitution der vorstehenden Werthe von $i_1$ und $\sigma_1$

$$\theta_1 = \theta_0 + \frac{p_1}{\sin i_0} - p_1 q_1 \frac{2 - 3\sin^2 i_0}{2\varrho \sin^2 i_0 \cos i_0} + \Gamma_1$$

giebt. Aus der Gleichung $\pi_1 = \chi_1 - \sigma_1 + \theta_1$ erhält man schliesslich

$$\pi_1 = \chi_1 + p_1 \operatorname{tg} \tfrac{1}{2} i_0 + p_1 q_1 \frac{(1 + 2\cos i_0) \operatorname{tg}^2 \frac{1}{2} i_0}{2\varrho \cos i_0} + \Gamma_1$$

womit alle Elemente gegeben sind.

Digitized by Google

106.

In der Abhandlung (I) habe ich schon angedeutet, dass die hier der Berechnung der Störungen der Egeria zu Grunde gelegten osculirenden Elemente wohl nicht die grösste Genauigkeit besitzen möchten, und der Grund zu dieser Annahme ist der, dass sie ein paar Jahre nach der Entdeckung der Egeria abgeleitet worden sind, und daher nur auf Beobachtungen beruhen, die eine zu kurze Zeit für die sichere Bestimmung der Elemente umfassen. Seitdem sind andere Bahnbestimmungen der Egeria bekannt gemacht worden, die, weil sie auf Beobachtungen beruhen, die zahlreicher sind und einen grösseren Zeitraum umfassen, mehr Genauigkeit besitzen müssen, wie die hier angewandten. Die eben gelöste Aufgabe kann nun dienen, um die in diesen Abhandlungen der numerischen Rechnung zu Grunde gelegten Elemente der Egeria mit den verbesserten Elementen zu vergleichen, ihre Fehler kennen zu lernen, und darauf die berechneten Störungscoefficienten zu berichtigen.

Der Umstand, dass die osculirenden Elemente, die man der Berechnung der Störungen irgend eines Planeten zu Grunde legt, nicht die erforderliche Genauigkeit besitzen, ist nie erwünscht, weil er die Arbeit vergrössert, und man muss ihn daher, wo man es kann, vermeiden. Allein es können Fälle vorkommen, in welchen er nicht hat vermieden werden können, und deshalb dürfen die Entwickelungen der Ausdrücke, die zur Verbesserung desselben dienen, nicht weggelassen werden. Dass dieser Umstand in dem hier gewählten Beispiel eingetreten ist, ist mir deshalb nicht unlieb, weil er mir Gelegenheit giebt, durch ein Beispiel zu zeigen, wie die darauf sich beziehenden Entwickelungen anzuwenden sind.

107.

Obgleich man für die Ermittelung der Fehler des angewandten Systems osculirender Elemente nur Ein solches System nöthig hat, so will ich doch die hier angewandten Elemente mit zwei anderen Systemen vergleichen, da hieraus eine Verification der Rechnung und der zwei anderen Systeme von Elementen hervorgeht. In No. 72 des »Astronomical Journal« hat Hubbard die folgenden verbesserten Elemente der Egeria veröffentlicht:

Digitized by Google

1851 Januar 1,0 m. Z. Berlin

$$
\begin{aligned}
c &= 299^\circ\ 7'\ 43''.6 \\
\pi &= 119\ \ 1\ \ 20.4 \\
\theta &= \ \ 43\ 17\ \ \ 3.3 \\
\varphi &= \ \ \ 4\ 53\ \ 25.9 \\
i &= \ \ 16\ 33\ \ \ 8.6 \\
n &= 857''.7580
\end{aligned}
$$

Aequinox der Epoche

und in No. 995 der Astr. Nachr. findet man folgende Elemente von Günther*)

1856 Febr. 19,0 m. Z. Berlin

$$
\begin{aligned}
c &= \ 25^\circ\ 11'\ \ 4''.1 \\
\pi &= 119\ \ 45\ \ \ 7.0 \\
\theta &= \ \ 43\ \ 17\ \ 33.5 \\
\varphi &= \ \ \ 4\ \ 59\ \ 45.2 \\
i &= \ \ 16\ \ 32\ \ 14.2 \\
n &= 857''.76929
\end{aligned}
$$

Aequinox der Epoche

In Bezug auf die Ekliptik und das Aequinox, auf welche sich die obigen Hubbard'schen Elemente beziehen, ist nichts vorzubereiten, da es dieselben sind, auf welche sich die in diesen Abhandlungen angewandten Elemente beziehen, die Günther'schen Elemente müssen hingegen, da sie auf eine andere Ekliptik und ein anderes Aequinox bezogen sind, vor allen Dingen auf jenes Aequinox zurückgeführt werden. Durch die von mir in No. 823 der Astr. Nachr. entwickelten Ausdrücke fand ich, dass man diesen Elementen, um sie auf Ekliptik und Aequinox von 1851 Jan. 1,0 hinzuführen, folgende Zahlenwerthe hinzufügen muss:

| | |
|---|---|
| der Neigung .. | $-1''.6$ |
| dem Knoten .. | $-4'\ 18.2$ |
| dem Perihel .. | $-4\ \ 11.7$ |

Die im Folgenden zur Vergleichung anzuwendenden Elemente werden daher statt des zweiten vorstehenden Systems die folgenden:

*) Ich bemerke hiezu, dass ich die weiter unten in diesem § folgenden Rechnungen schon vor einigen Jahren zu einer Zeit ausgeführt habe, wo keine anderen verbesserten Elemente wie diese beiden Systeme bekannt waren. Später sind noch andere verbesserte Elemente veröffentlicht worden, allein ich glaube ihre unmittelbare Vergleichung mit den angewandten Elementen zu dem hier zu erreichenden Zweck für nicht nöthig halten zu dürfen, indem die obigen beiden Systeme dazu ausreichend sind.

Digitized by Google

1856 Febr. 19,0 m. Z. Berlin

$$\begin{aligned} c &= 25^0\ 11'\ 4''.1 \\ \pi &= 119\ \ 40\ 48.8 \\ \theta &= 43\ \ 13\ 21.8 \\ \varphi &= 4\ \ 59\ 45.2 \\ i &= 16\ \ 32\ 12.6 \\ n &= 857''.76929 \end{aligned}$$

Aequinox von 1851,0

## 108.

Es wurden nun für die beiden Zeitpunkte

1851 Jan. 1,0 m. Z. B. und 1856 Febr. 19,0 m. Z. B.

der numerische Betrag sowohl der im Art. 94 angegebenen Jupiterstörungen und ihrer Differentiale, wie der Betrag der im Art. 59 (II) erhaltenen Saturnstörungen und ihrer Differentiale berechnet. Bei den letzteren wurden die Glieder der Abtheilung $i'=0$ weggelassen, da diese schon den genannten Jupiterstörungen einverleibt sind. Als Hülfsmittel für diese Berechnung diente zuerst die, zwischen der in der Berechnung der Störungen angenommenen Epoche und den oben angeführten Zeitpunkten liegende, Anzahl von mittleren Sonnentagen und zwar

für 1851 Jan. 1,0 und für 1856 Febr. 19,0

$-338.0372$ $\qquad$ $+1536.9628$

woraus

$$\begin{aligned} g &= 298^0\ 58'\ 33''.0 \text{ und } = 25^0\ 59'\ 47''.5 \\ \varepsilon &= 294\ \ 33\ \ \ 9.6 \ldots = 28\ \ 18\ \ \ 7.6 \\ nt &= -1.407 \qquad \ldots = +6.397 \end{aligned}$$

gefunden wurde, von welchen die Werthe von $nt$ dazu dienten, um die mit diesem Factor multiplicirten Störungsglieder zu berücksichtigen. Aus den Jupitertafeln fand ich für dieselben Zeitpunkte

$$g' = 178^0\ 43'\ 49''.7 \ldots = 334^0\ 30'\ 43''.9$$

und aus den Saturntafeln

$$g' = 296^0\ 13'\ 15''.6 \ldots = 358^0\ 56'\ 38''.4$$

welchen die Beträge der grossen Ungleichheiten schon hinzugefügt sind. Da nun aus dem Art. 74 (I) folgt, dass

$$c' - \mu c + \mu\varepsilon = g' + \mu e_0 \sin\varepsilon$$

Digitized by Google

ist, so ergab sich aus den vorstehenden Zahlenwerthen für den Jupiter

$$c' - \mu c + \mu\varepsilon = 177^0\ 11'\ 20''.6\ \ldots\ = 335^0\ 18'\ 56''.3$$

und für den Saturn

$$c' - \mu c + \mu\varepsilon = 295^0\ 36'\ 1''.1\ \ldots\ = 359^0\ 16'\ 3''.1$$

Hiemit konnten die numerischen Werthe aller Argumente gebildet und die Substitutionen derselben ausgeführt werden. Hiedurch wurde erhalten

| | für 1851 Jan. 1,0 | und für 1856 Febr. 19,0 |
|---|---|---|
| $(n_0 z)_1$ | $= 298^0\ 55'\ 25''.1\ \ldots$ | $= 25^0\ 51'\ 24''.5$ |
| $\frac{d(n_0 \delta z)_1}{d\varepsilon}$ | $= +41.30\ \ldots$ | $= +817.00$ |
| $\nu_1$ | $= +1.29\ \ldots$ | $= -434.29$ |
| $\frac{d\nu_1}{d\varepsilon}$ | $= -14.59\ \ldots$ | $= +50.73$ |
| $\frac{u_1}{\cos i_0}$ | $= -3.36\ \ldots$ | $= -68.83$ |
| $\frac{du_1}{\cos i_0\, d\varepsilon}$ | $= -3.62\ \ldots$ | $= -48.89$ |
| $\Gamma_1$ | $= 0.00\ \ldots$ | $= +0.02$ |

Da im Vorhergehenden $(n) - n_0 = -0''.1064$ gefunden worden ist, so ergab sich aus den vorstehenden Werthen von $\frac{d(n_0 \delta z)_1}{d\varepsilon}$

$$\frac{d\,\delta z_1}{dt} = +17''.25\ \ldots\ = +857''.41$$

und aus diesen numerischen Werthen und durch Zuziehung der im Art. 77 (I) angegebenen Elemente der Egeria wurden nach Anleitung der Artt. 101 u. f. die beiden folgenden Systeme von osculirenden Elementen abgeleitet,

$$\begin{aligned}
c_1 &= 299^0\ 2'\ 0''.6\ \ldots\ = 25\ 18'\ 20''.3\\
\pi_1 &= 119\ 6\ 7.1\ \ldots\ = 119\ 43\ 23.8\\
\theta_1 &= 43\ 17\ 19.9\ \ldots\ = 43\ 13\ 20.5\\
\varphi_1 &= 4\ 52\ 37.6\ \ldots\ = 4\ 59\ 0.9\\
i_1 &= 16\ 33\ 2.5\ \ldots\ = 16\ 32\ 8.3\\
n_1 &= 858''.10649\ \ldots\ = 858''.11446
\end{aligned}$$

die mit den oben angeführten übereinstimmen müssen, wenn alle drei in Betracht gezogenen Systeme von osculirenden Elementen richtig sind.

Digitized by Google

109.

Zieht man die eben erhaltenen Elemente von den im Art. 107 angeführten ab, so bekommt man die folgenden Unterschiede

| für 1851 Jan. 1,0 | | für 1856 Febr. 19,0 |
|---|---|---|
| $\Delta c =$ | $+ 5' 43''.0 \ldots =$ | $- 7' 16''.2$ |
| $\Delta \pi =$ | $- 4 46.7 \ldots =$ | $- 2 35.0$ |
| $\Delta \theta =$ | $- 16.6 \ldots =$ | $+ 1.3$ |
| $\Delta \varphi =$ | $+ 48.3 \ldots =$ | $+ 44.3$ |
| $\Delta i =$ | $+ 6.1 \ldots =$ | $+ 4.3$ |
| $\Delta n =$ | $- 0''.34849 \ldots =$ | $- 0''.34517$ |

die als die Verbesserungen der in diesen Abhandlungen den numerischen Rechnungen zu Grunde gelegten osculirenden Elemente zu betrachten sind.

In Bezug auf die Unterschiede in den Werthen von $\Delta c$, die die obige Zusammenstellung zeigt, bemerke ich, dass wenn in dem Systeme von osculirenden Elementen, von welchem man ausgeht, die mittlere Bewegung mit einem Fehler behaftet ist, wie hier zufolge der vorstehenden Werthe von $\Delta n$ der Fall ist, die verschiedenen Zeitpunkten angehörigen Verbesserungen des Elements $c$ nicht dieselben sein können, sondern nothwendiger Weise, eben der unrichtigen mittleren Bewegung wegen, mit der Zeit wachsen müssen. Um die eigentliche Verbesserung dieses Elements zu erhalten, muss man daher von den obigen Werthen von $\Delta c$ die Producte der Verbesserung der mittleren Bewegung in die Zwischenzeiten abziehen. Nun wird aber

$$- 0''.34849 \times - \ 338.0372 = + 1' 57''.8$$
$$- 0.34517 \times + 1536.9628 = - 8 \ 50.6$$

Zieht man diese Producte von den obigen Werthen von $\Delta c$ ab, so wird

$$\Delta c = + 3' 45''.2 \ldots = + 1' 34''.4$$

Ferner bemerke ich, dass ein Fehler in der Bestimmung des Elements $\pi$, wenigstens bei nicht sehr grossen Excentricitäten, einen entgegengesetzten Fehler von nahe derselben Grösse in $c$ hervorbringen muss, wenn alles übrige richtig ist, es müssen sich mit anderen Worten die Fehler von $\pi$ und $c$ so combiniren, dass daraus ein geringer Unterschied in den Fehlern der mittleren Länge der Epoche herauskommt. Bezeichnet man den Fehler des letztgenannten Elements mit $\Delta l$, so wird

$$\Delta l = \Delta c + \Delta \pi$$

Digitized by Google

und wendet man diese Gleichung auf die oben gefundenen Verbesserungen von $c$ und $\pi$ an, so ergiebt sich

$$\Delta l = -1'\ 1''5 \ldots = -1'\ 0''6$$

welches eine so gute Uebereinstimmung ist, wie erwartet werden darf. Auch die übrigen oben gefundenen Verbesserungen der Elemente zeigen bis auf $\Delta\pi$ eine befriedigende Uebereinstimmung, und die Unsicherheit, die denselben etwa noch anhängen mag, kann auf die Berichtigung der Störungscoefficienten, zu welchem Zweck sie berechnet worden sind, keinen merklichen Einfluss üben. In der Bestimmung der Länge des Perihels scheint in einem der beiden eben angeführten Elementensysteme ein Fehler vorgekommen zu sein, von welchem ich bisher nicht wusste, welchem Elementensystem er zuzuschreiben sei. Die neueste Publication des Herrn Günther über die Bahn der Egeria in No. 1132 der Astr. Nachr. scheint darüber Aufschluss zu geben. In dieser kommen unter verschiedenen Elementensystemen auch das für 1856 März 5,0 geltende vor, und in diesem System wird

$$\pi = 119^0\ 43'\ 3''3$$

angegeben, während in dem oben im Art. 106 angeführten, für 1856 Febr. 19,0 geltenden

$$\pi = 119^0\ 45'\ 7''0$$

angesetzt ist. Ohne die relativen Störungen der Länge des Perihels für den hier vorkommenden Zeitraum von 15 Tagen berechnet zu haben, darf ich mich wohl der Ansicht hingeben, dass dieselben lange nicht den Unterschied von 2' 3''7 erreichen können, den die eben angeführten beiden Längen des Perihels zeigen; zumal in diesem Zeitraum die Egeria fast in heliocentrischer Opposition mit dem Jupiter war. Berücksichtigt man aber diesen Unterschied von 2' 3''7 in der obigen Zusammenstellung der Verbesserung der hier angewandten Elemente, so werden die beiden Werthe von $\Delta\pi$

$$\Delta\pi = -4'\ 46''7 \ldots = -4'\ 38''7$$

und somit ist auch in diesem Element eine gute Uebereinstimmung der Verbesserung desselben erlangt worden. Nimmt man nun von den Verbesserungen der übrigen Elemente das Mittel aus beiden oben erlangten Bestimmungen derselben, so bekommt man

Digitized by Google

$$\begin{aligned}\Delta c &= +3'\ 45''.2\\ \Delta \pi &= -\ 4\ \ 46.7\\ \Delta \theta &= -\ \ 7.7\\ \Delta \varphi &= +\ 46.3\\ \Delta i &= +\ \ 5.2\\ \Delta n &= -0''.34683\end{aligned}$$

von welchen erwartet werden darf, dass sie für die Verbesserung der Störungscoefficienten hinreichende Genauigkeit besitzen. Die verbesserten osculirenden Elemente der Egeria für 1851 Dec. 5,0 m. Z. Greenwich sind demnach die folgenden:

$$\left.\begin{aligned}c_0 &= 19^0\ 35'\ 28''.8\\ \pi_0 &= 119\ \ 7\ \ 25.7\\ \theta_0 &= 43\ 17\ \ 1.4\end{aligned}\right\}\text{ m. Aeq. von } 1851{,}0$$

$$\begin{aligned}\varphi_0 &= 4\ 52\ 53.7\\ i_0 &= 16\ 33\ 11.9\\ n_0 &= 858''.0393\end{aligned}$$

## §. 9. Entwickelung der Ausdrücke für die Verbesserungen der Störungscoefficienten, die aus der Verbesserung der der Rechnung zu Grunde gelegten osculirenden Elemente entstehen.

### Anwendung auf die im Vorhergehenden berechneten Störungen.

110.

Da die Verbesserung der der Rechnung zu Grunde gelegten osculirenden Elemente stets als Grössen der ersten Ordnung in Bezug auf die störenden Kräfte betrachtet werden müssen, so kann sich die Verbesserung der Störungscoefficienten auf die der ersten Ordnung beziehen, indem eine Verbesserung der Störungscoefficienten zweiter Ordnung Grössen der dritten Ordnung hervorbringen würde, die als unmerklich angesehen werden können. Setzen wir wie früher (§. 5 (I))

$$\frac{dW_0}{d\varepsilon} = T;\ \frac{dR_0}{d\varepsilon} = U$$

und ausserdem

$$\frac{\varrho}{a} T = A$$

Digitized by Google

wo wieder $\varrho = a\,(1 - e\cos\eta)$ ist, so können die Ausdrücke, durch welche im Vorhergehenden die Störungen erster Ordnung berechnet worden sind, folgendermaassen gestellt werden,

$$n\delta z = \int d\varepsilon \left(\overline{\int A\, d\varepsilon}\right)$$

$$\nu = -\tfrac{1}{2}\int\left(\frac{d\int T d\varepsilon}{d\eta}\right) d\varepsilon$$

$$\frac{u}{\cos i} = \left(\overline{\int U d\varepsilon}\right)$$

wo der Strich über den Functionen wieder andeutet, dass $\eta$ in $\varepsilon$ verwandelt werden muss.

Bezeichnen wir nun durch ein vorgesetztes $\Delta$ das Increment der Function, welches entsteht, wenn man statt der ursprünglich angewandten Werthe der osculirenden Elemente die verbesserten Werthe derselben substituirt, so bekommen wir aus den vorstehenden Ausdrücken die folgenden,

$$\Delta n\delta z = \int d\varepsilon \left(\overline{\int \Delta A\, d\varepsilon}\right)$$

$$\Delta\nu = -\tfrac{1}{2}\int\left(\frac{d\int \Delta T d\varepsilon}{d\eta}\right) d\varepsilon$$

$$\frac{\Delta u}{\cos i} = \left(\overline{\int \Delta U d\varepsilon}\right)$$

und da $A$, $T$ und $U$ Functionen der Elemente sind, so liegt zunächst, dass man die Incremente dieser Functionen wie folgt ausdrücken kann,

$$\Delta A = \left(\frac{dA}{da}\right)\Delta a + \left(\frac{dA}{d\varphi}\right)\Delta\varphi + \left(\frac{dA}{d\pi}\right)\Delta\pi + \left(\frac{dA}{di}\right)\Delta i + \left(\frac{dA}{d\theta}\right)\Delta\theta$$

$$\Delta T = \left(\frac{dT}{da}\right)\Delta a + \text{etc.}$$

$$\Delta U = \left(\frac{dU}{da}\right)\Delta a + \text{etc.}$$

wo $\Delta a$, $\Delta\varphi$ etc. die Verbesserungen der Elemente sind. Die Verbesserung $\Delta c$ kommt in diesen Functionen nicht explicite vor, sondern ist implicite in der excentrischen Anomalie $\varepsilon$ enthalten, in Bezug auf welche die obigen Functionen hier entwickelt worden sind.

## III.

Die Incremente von $A$, $T$, $U$ sind in der eben aufgestellten Form mühsam zu berechnen, weil die Berechnung mehrerer der in den Ausdrücken derselben vorkommenden Differentialquotienten mühsam ist, und man verfährt weit einfacher, wenn man den Umstand benutzt, dass



Digitized by Google

$\Delta$, $T$, $U$ in ihren zusammengesetzteren Theilen Functionen von $\omega + \chi$, $\varrho$, $v$, $r$, $\varphi$, $\psi$, $J$ sind, wenn man die Bezeichnungen im Sinne der §§. 4 (I) und 5 (I) nimmt. Von diesen Grössen dürfen $v$ und $r$ ihrerseits als Functionen von $\varepsilon$ und $\nu$, sowie $\omega + \chi$ und $\varrho$ als Functionen der analogen Grössen $\eta$ und $\beta$ betrachtet werden. Da ferner zufolge der angezogenen §§, wenn für einen Augenblick $H$ und $H'$ auch in der dort ihnen gegebenen Bedeutung wieder aufgenommen werden, $\Delta III = -\Delta\varphi$ und $\Delta III = -\Delta\psi$ wird, so können zufolge der dort abgeleiteten Sätze, und weil hier die Elemente des störenden Planeten nicht in Betracht kommen, $\varphi$, $\psi$ und $J$ als Functionen von $u$ und $\frac{du}{ds}$ betrachtet werden. Die Anwendung dieser Betrachtungen wird auf Ausdrücke führen, die in ihrer Anwendung weit einfacher sind, wie die im vor. Art. aufgestellten, und zwar auf solche, die von den im §. 5 (I) abgeleiteten nur wenig verschieden sind, welche man ohnehin für die Berechnung der Störungen zweiter Ordnung brauchen muss. Es wird hievon die Folge sein, dass wir die hier im §. 4 berechneten Hülfsgrössen, die bei der Berechnung der Störungen zweiter Ordnung gebraucht wurden, fast ungeändert auch auf die Lösung der gegenwärtigen Aufgabe werden anwenden können.

Die erste nun zu lösende Aufgabe besteht darin, $\Delta\varepsilon$, $\Delta\nu$, $\Delta u$, $\Delta\frac{du}{ds}$ durch die Incremente der Elemente auszudrücken, und dieses kann auf die folgende Art ausgeführt werden. Aus den Gleichungen

$$\bar{r}\cos f = a\cos\varepsilon - a\sin\varphi$$
$$\bar{r}\sin f = a\cos\varphi\sin\varepsilon$$
$$v = f + \chi$$
$$r = \bar{r}(1+\nu)$$

bekommt man einestheils, wenn man $a$, $\varphi$, $\chi$ veränderlich und $\varepsilon$ und $\nu$ constant annimmt,

$$\Delta v = \frac{a}{\bar{r}}\sin\varepsilon\,.\,\Delta\varphi + \Delta\chi$$
$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta a}{a} - \frac{a}{\bar{r}}\cos\varphi\cos\varepsilon\,.\,\Delta\varphi$$

und anderntheils, wenn man $\varepsilon$ und $\nu$ veränderlich, und $a$, $\varphi$, $\chi$ constant setzt,

$$\Delta v = \frac{a}{\bar{r}}\cos\varphi\,.\,\Delta\varepsilon$$
$$\frac{\Delta r}{r} = \frac{\Delta\nu}{1+\nu} + \frac{a}{\bar{r}}e\sin\varepsilon\,.\,\Delta\varepsilon$$

Durch Gleichstellung dieser doppelten Ausdrücke für $\Delta v$ und $\Delta r$ ergiebt sich

Digitized by Google

$$\left.\begin{aligned} \Delta\varepsilon &= \frac{\sin\varepsilon}{\cos\varphi}\Delta\varphi + \frac{1-e\cos\varepsilon}{\cos\varphi}\Delta\chi \\ \Delta\nu &= \frac{\Delta a}{a} - \frac{e+\cos\varepsilon}{\cos\varphi}\Delta\varphi - \frac{e\sin\varepsilon}{\cos\varphi}\Delta\chi \end{aligned}\right\} \qquad (45)$$

wo ich den Divisor $1+\nu$ weggelassen habe, weil er hier nur Grössen höherer Ordnung hervorbringen würde. Wenn man in diesen Ausdrücken $\varepsilon$ mit $\eta$ vertauscht, so ergeben sich die folgenden

$$\Delta\eta = \frac{\sin\eta}{\cos\varphi}\Delta\varphi + \frac{1-e\cos\eta}{\cos\varphi}\Delta\chi$$
$$\Delta\beta = \frac{\Delta a}{a} - \frac{e+\cos\eta}{\cos\varphi}\Delta\varphi - \frac{e\sin\eta}{\cos\varphi}\Delta\chi$$

Der Abhandlung (I) zufolge ist

$$u = \frac{\overline{r}}{a}\,q\sin(v-\theta_0) - \frac{\overline{r}}{a}\,p\cos(v-\theta_0)$$

wo

$$p = \sin i\,\sin(\sigma-\theta_0)$$
$$q = \sin i\cos(\sigma-\theta_0) - \sin i_0$$

ist. Um hieraus zu den Incrementen überzugehen, muss nach den Differentiationen $i=i_0$ und $\varphi=\theta_0$ gesetzt werden, und man erhält also

$$\Delta p = \sin i\,.\,\Delta\sigma;\quad \Delta q = \cos i\,.\,\Delta i$$

und es wird also

$$\Delta u = \frac{\overline{r}}{a}\cos i\,\sin(v-\theta_0)\Delta i - \frac{\overline{r}}{a}\sin i\cos(v-\theta_0)\Delta\sigma$$

führt man hierin die excentrische Anomalie, und $\Delta\sigma = \cos i\,\Delta\theta$ ein, und setzt zur Abkürzung

$$\lambda = \{\cos(\pi-\theta)\Delta i + \sin(\pi-\theta)\sin i\Delta\theta\}\cos\varphi$$
$$\mu = \sin(\pi-\theta)\Delta i - \cos(\pi-\theta)\sin i\Delta\theta$$

so wird

$$\frac{\Delta u}{\cos i} = \lambda\sin\varepsilon + \mu(\cos\varepsilon - e) \qquad (46)$$

und hieraus folgt unmittelbar

$$\frac{\Delta\frac{du}{dt}}{\cos i} = \lambda\cos\varepsilon - \mu\sin\varepsilon \qquad (47)$$

womit die Incremente $\Delta\varepsilon$, $\Delta\nu$, $\Delta\eta$, $\Delta\beta$, $\Delta u$, $\Delta\frac{du}{dt}$ in Function der Incremente der Elemente dargestellt sind.

## 112.

Die hier anzuwendenden Ausdrücke für $A$ und $U$ sind die folgenden

$$A = \frac{1}{a\cos\varphi}\left\{2\varrho^2\cos(f-\omega) - \varrho r + 2\frac{\varrho^2 r}{a\cos^2\varphi}[\cos(f-\omega)-1]\right\}\left(\frac{d\Omega}{df}\right)$$
$$+ \frac{2}{a\cos\varphi}\varrho^2\sin(f-\omega)\,r\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$
$$U = \frac{\varrho r^2}{a\cos\varphi}\sin(\omega-f)\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\cos i$$



Digitized by Google

Es giebt sich hier von selbst zu erkennen, dass in diesen Ausdrücken die Factoren der Differentialquotienten der Störungsfunction Functionen von $a$, $\varphi$, $f$, $r$, $\omega$, $\varrho$ sind, von welchen die vier letzten als solche Functionen von $\varepsilon$, $\nu$, $\eta$, $\beta$ betrachtet werden dürfen, denen die im vor. Art. entwickelten Incremente zukommen. Es ist ausserdem auch der Ausdruck für $U$ mit $\cos i$ multiplicirt, allein die Veränderung dieses Factors darf hier nicht berücksichtigt werden, da in den vorhergehenden numerischen Rechnungen $\cos i$ als algebraisches Zeichen durchgeführt worden ist. Da hier die Elemente des störenden Planeten ungeändert bleiben, so sind die Differentialquotienten der Störungsfunction als Functionen von $f$, $r$, $u\ \frac{du}{dt}$ zu betrachten, wie in der Abhandlung (I) erklärt worden ist. Endlich ist hier gleichwie im Vorhergehenden auch die Veränderung der Grösse $\lambda$ zu berücksichtigen, die bei der Verwandelung der Form $\frac{\cos}{\sin}\{ie - i'g'\}$ in $\frac{\cos}{\sin}\{(i-i'\mu)\varepsilon - i'(c'-c\mu)\}$ angewandt wird, und es müssen auch die Integrationsdivisoren wieder dem Werthe von $\Delta n$ gemäss verbessert werden. Dieses letztere kann am Ende der übrigen Rechnungen für sich ausgeführt werden, und jenes wird ebenso ausgeführt, wie in §. 4 gezeigt wurde, nur ist hier der Ausdruck von $\Delta\lambda$ anders wie der dort entwickelte Ausdruck für $\delta\lambda$. Da

$$\lambda = \tfrac{1}{2}\mu e$$

wo $\mu = \frac{n'}{n}$ ist, so wird

$$\Delta\lambda = \tfrac{\mu}{2}\left\{\cos\varphi \cdot \Delta\varphi - e\frac{\Delta n}{n}\right\} \tag{48}$$

der hier anzuwendende Ausdruck für $\Delta\lambda$.

## 113.

In Folge der vorhergehenden Betrachtungen nimmt nun das Increment von $\Delta$ die folgende Form an,

$$\Delta\Delta = \left(\frac{d\Delta}{d\lambda}\right)\Delta\lambda + \left(\frac{d\Delta}{d\eta}\right)\Delta\eta + \left(\frac{d\Delta}{d\beta}\right)\Delta\beta + \left(\frac{d\Delta}{d\varepsilon}\right)\Delta\varepsilon + \left(\frac{d\Delta}{d\nu}\right)\Delta\nu + \left(\frac{d\Delta}{d\varphi}\right)\Delta\varphi + \left(\frac{d\Delta}{da}\right)\Delta a + \left(\frac{d\Delta}{du}\right)\Delta u + \left(\frac{d\Delta}{du_1}\right)\Delta u_1$$

wo ich zur Abkürzung $u_1$ statt $\frac{du}{dt}$ geschrieben habe. Gleichwie in §. 5 (I) erhalten wir hier

$$\left(\frac{d\Delta}{d\nu}\right) = r\left(\frac{d\Delta}{dr}\right);\quad \left(\frac{d\Delta}{d\beta}\right) = \varrho\left(\frac{d\Delta}{d\varrho}\right)$$

und wegen der Gleichung $\Delta = \frac{\varrho}{a}T$ wird

$$\left(\frac{d\Delta}{d\lambda}\right) = \frac{\varrho}{a}\left(\frac{dT}{d\lambda}\right);\quad \left(\frac{d\Delta}{d\varepsilon}\right) = \frac{\varrho}{a}\left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right)$$

Digitized by Google

wo $\left(\frac{dT}{d\lambda}\right)$ und $\left(\frac{dT}{de}\right)$ dieselben im Vorhergehenden entwickelten und angewandten Functionen sind. Aus dem im vor. Art. aufgestellten Ausdruck für $\Delta$ ergiebt sich ferner durch die Differentiation

$$\varrho\left(\frac{d\Delta}{d\varrho}\right) = \frac{\varrho}{a}\{2T+\overline{T}\}$$
$$r\left(\frac{d\Delta}{dr}\right) = \frac{\varrho}{a}\{V+T+X\}$$

wo $T$, $\overline{T}$, $V$, $X$ auch dieselben Grössen sind, die unter dieser Bezeichnung im §. 5 (I) eingeführt, und im Vorhergehenden entwickelt und angewandt worden sind. Der Ausdruck für $\Delta$ giebt ferner

$$\left(\frac{d\Delta}{d\varphi}\right) = \frac{\varrho\varrho}{a\cos\varphi}\{3T+2X+2\overline{T}\}$$
$$a\left(\frac{d\Delta}{da}\right) = -\frac{\varrho}{a}\{2T+X+\overline{T}\}$$

und endlich wird auch

$$\cos i\left(\frac{d\Delta}{du}\right) = \frac{\varrho}{a}D;\quad \cos i\left(\frac{d\Delta}{du_i}\right) = \frac{\varrho}{a}E$$

wo auch $D$ und $E$ dieselbe Bedeutung haben, wie im §. 5 (I). Substituiren wir nun diese Ausdrücke in den obigen Ausdruck für $\Delta\Delta$, so wird dieser

$$\Delta\Delta = \frac{\varrho}{a}\left\{\left(\frac{dT}{d\lambda}\right)\Delta\lambda + \left(\frac{dT}{de}\right)\Delta\varepsilon + [V+T+X]\Delta\nu + \frac{e}{\cos\varphi}[3T+2X+2\overline{T}]\Delta\varphi\right.$$
$$-[2T+X+\overline{T}]\frac{\Delta a}{a} + D\frac{\Delta u}{\cos i} + E\frac{\Delta u_i}{\cos i} + [2T+\overline{T}]\Delta\beta\Big\}$$
$$+\left(\frac{d\Delta}{d\eta}\right)\Delta\eta$$

welcher einer wesentlichen Reduction fähig ist.

## 114.

Aus den Gleichungen

$$\Delta\varepsilon = \frac{\sin\varepsilon}{\cos\varphi}\Delta\varphi + \frac{1-e\cos\varepsilon}{\cos\varphi}\Delta\chi$$
$$\Delta\nu = \frac{\Delta a}{a} - \frac{e+\cos\varepsilon}{\cos\varphi}\Delta\varphi - \frac{e\sin\varepsilon}{\cos\varphi}\Delta\chi$$

bekommt man erstlich

$$\frac{d\Delta\varepsilon}{d\varepsilon} = \frac{\cos\varepsilon}{\cos\varphi}\Delta\varphi + \frac{e\sin\varepsilon}{\cos\varphi}\Delta\chi$$

und hiemit

$$\frac{d\Delta\varepsilon}{d\varepsilon} + \Delta\nu = \frac{\Delta a}{a} - \frac{e}{\cos\varphi}\Delta\varphi$$

Wegen der Gleichung $a^3n^2 = k^2(1+m)$ giebt aber $h = \frac{an}{\cos\varphi}$ durch die Differentiation

$$\frac{\Delta h}{h} = -\frac{1}{2}\frac{\Delta a}{a} + \frac{e}{\cos\varphi}\Delta\varphi \qquad (49)$$

Digitized by Google

und es wird daher

$$\frac{\Delta a}{a} = 2\frac{d\Delta\varepsilon}{d\varepsilon} + 2\Delta\nu + 2\frac{\Delta h}{h}$$
$$\frac{e}{\cos\varphi}\Delta\varphi = \frac{d\Delta\varepsilon}{d\varepsilon} + \Delta\nu + 2\frac{\Delta h}{h}$$

Da aber hier $\Delta a$ und $\Delta\varphi$ Constanten sind, so dürfen wir in die rechte Seite dieser Gleichungen $\eta$ für $\varepsilon$, und $\beta$ für $\nu$ setzen. Es wird daher auch

$$(50)\qquad \begin{cases} \frac{\Delta a}{a} = 2\frac{d\Delta\eta}{d\eta} + 2\Delta\beta + 2\frac{\Delta h}{h} \\ \frac{e}{\cos\varphi}\Delta\varphi = \frac{d\Delta\eta}{d\eta} + \Delta\beta + 2\frac{\Delta h}{h} \end{cases}$$

Substituirt man nun diese letzten Ausdrücke für $\Delta a$ und $\Delta\varphi$ in den obigen Ausdruck für $\Delta\Delta$, und setzt

$$(51)\qquad L = \left(\frac{dT}{d\lambda}\right)\Delta\lambda + \left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right)\Delta\varepsilon + \{B+T\}\Delta\nu + C\frac{\Delta h}{h} + D\frac{u}{\cos i} + E\frac{u_1}{\cos i}$$

wo $T$, $B$, $C$, $D$, $E$ dieselbe Bedeutung haben wie in §. 5 (I), so wird nach der Multiplication mit $d\varepsilon$ und der Integration

$$\int\Delta\Delta d\varepsilon = \frac{\varrho}{a}\int L d\varepsilon + \frac{\varrho}{a}\Delta\beta\int\{T+\overline{T}\}d\varepsilon - \frac{\varrho}{a}\frac{d\Delta\eta}{d\eta}\int T d\varepsilon + \Delta\eta\int\left(\frac{d\Delta}{d\eta}\right)d\varepsilon$$

Es ist aber

$$\left(\frac{d\Delta}{d\eta}\right) = \frac{\varrho}{a}\left(\frac{dT}{d\eta}\right) + T\frac{d\varrho}{ad\eta}$$

und in Folge der früher schon in diesen Abhandlungen eingeführten Bezeichnungen

$$\int T d\varepsilon = W_0;\quad \int\overline{T}d\varepsilon = \overline{W}_0 + 2\beta$$

indem bis auf Grössen zweiter Ordnung jede Seite der letzten Gleichung der Ausdruck der Function $\vartheta\frac{h_0}{h}$ ist. Substituirt man diese Ausdrücke und verwandelt $\eta$ in $\varepsilon$, so bekommt man

$$\overline{\left(\int\Delta\Delta d\varepsilon\right)} = \frac{r}{a}\overline{\left(\int L d\varepsilon\right)} + \left\{\frac{r}{a}\overline{\left(\frac{dW_0}{d\eta}\right)}\Delta\varepsilon + 2\left(\overline{W}_0+\nu\right)\Delta\nu\right\} + \overline{W}_0 k$$

wo

$$k = \frac{dr}{ad\varepsilon}\Delta\varepsilon - \frac{rd\Delta\varepsilon}{ad\varepsilon}$$

ist, und die numerischen Werthe von $\overline{\left(\frac{dW_0}{d\eta}\right)}$, $\overline{W}_0$, $\nu$ wieder durch die vorhergehenden Rechnungen gegeben sind. Zufolge des zu Anfang dieses § angegebenen Ausdrucks für $\Delta n dz$ wird daher

$$(52)\quad \Delta n dz = \int\left\{\frac{r}{a}\left[\overline{\left(\int L d\varepsilon\right)} + \overline{\left(\frac{dW_0}{d\eta}\right)}\Delta\varepsilon + 2\left(\overline{W}_0+\nu\right)\Delta\nu\right] + \overline{W}_0 k\right\}d\varepsilon$$

Digitized by Google

Um die eben eingeführte Hülfsgrösse $k$ zu entwickeln, substituire man die oben gegebenen Ausdrücke für $\Delta\varepsilon$ und $\frac{d.\Delta\varepsilon}{d\varepsilon}$ in den vorstehenden Ausdruck; nimmt man darauf auf die Gleichungen

$$\frac{r}{a} = 1 - e\cos\varepsilon\,,\quad \frac{dr}{ad\varepsilon} = e\sin\varepsilon$$

Rücksicht, so bekommt man

$$k = \frac{e-\cos\varepsilon}{\cos\varphi}\,\Delta\varphi \qquad (53)$$

Ich führe hier noch an, dass

$$\frac{\Delta a}{a} = -\frac{2}{3}\frac{\Delta n}{n}$$

ist, da $\frac{\Delta a}{a}$ auch in den eben entwickelten Formeln vorkommt.

## 115.

Die Gleichung

$$A = \frac{\varrho}{a}T$$

giebt

$$\Delta A = \frac{\varrho}{a}\Delta T + T\,\Delta\frac{\varrho}{a}$$

Da ferner

$$\Delta\frac{\varrho}{a} = \frac{d\varrho}{ad\eta}\Delta\eta + \frac{\varrho}{a}\Delta\beta - \frac{\varrho}{a}\frac{\Delta a}{a}$$

ist, so wird

$$\int\Delta T d\varepsilon = \frac{a}{\varrho}\int\Delta A d\varepsilon - \frac{ad\varrho}{\varrho d\eta}\Delta\eta\int T d\varepsilon - \Delta\beta\int T d\varepsilon + \frac{\Delta a}{a}\int T d\varepsilon$$

substituirt man hierin den oben gegebenen Werth von $\int\Delta A d\varepsilon$, so ergiebt sich

$$\int\Delta T d\varepsilon = \int L d\varepsilon + \Delta\eta\int\left(\frac{dT}{d\eta}\right)d\varepsilon - \frac{d.\Delta\eta}{d\eta}\int T d\varepsilon + \Delta\beta\int\overline{T}d\varepsilon + \frac{\Delta a}{a}\int T d\varepsilon$$

woraus

$$\frac{d\int\Delta T d\varepsilon}{d\eta} = \frac{d\int L d\varepsilon}{d\eta} + \Delta\eta\int\frac{d^2T}{d\eta^2}d\varepsilon - \frac{d^2.\Delta\eta}{d\eta^2}\int T d\varepsilon + \frac{d.\Delta\beta}{d\eta}\int T d\varepsilon + \frac{\Delta a}{a}\int\left(\frac{dT}{d\eta}\right)d\varepsilon$$

folgt. Verwandelt man hierin $\eta$ in $\varepsilon$, substituirt die oben gegebenen Ausdrücke für $\int T d\varepsilon$ und $\int T d\varepsilon$ durch $W_0$, und erwägt, dass

$$\frac{d^2.\Delta\varepsilon}{d\varepsilon^2} = -\frac{d.\Delta\nu}{d\varepsilon} = -\Delta\varepsilon + \frac{\Delta\chi}{\cos\varphi}$$

aus den Ausdrücken (45) hervorgeht, so bekommt man

$$\left(\frac{d\int\Delta T d\varepsilon}{d\eta}\right) = \left(\frac{d\int L d\varepsilon}{d\eta}\right) + \left\{\left(\frac{d^2W_0}{d\eta^2}\right) + 2(\overline{W}_0+\nu)\right\}\Delta\varepsilon - 2(\overline{W}_0+\nu)\frac{\Delta\chi}{\cos\varphi} + \left(\frac{d\overline{W}_0}{d\eta}\right)\frac{\Delta a}{a}$$

und hieraus

$$\Delta\nu = -\frac{1}{2}\int\left\{\left(\frac{d\int L d\varepsilon}{d\eta}\right) + \left\{\left(\frac{d^2W_0}{d\eta^2}\right) + 2(\overline{W}_0+\nu)\right\}\Delta\varepsilon - 2(\overline{W}_0+\nu)\frac{\Delta\chi}{\cos\varphi} + \left(\frac{d\overline{W}_0}{d\eta}\right)\frac{\Delta a}{a}\right\}d\varepsilon \qquad (54)$$

Digitized by Google

Ich mache darauf aufmerksam, dass in diesen Ausdrücken $\Delta\nu$ linker Hand des Gleichheitszeichens eine andere Bedeutung hat wie rechter Hand desselben, indem $\Delta\nu$ linker Hand die Verbesserung bedeutet, die der vorher berechnete Werth von $\nu$, wegen der Aenderung der in der vorhergehenden Rechnung angewandten osculirenden Elemente, bekommt, während dasselbe Zeichen rechter Hand die durch die zweite Gleichung (45) gegebene Function der Incremente der Elemente bedeutet. Da hieraus keine Verwechselung entstehen kann, so habe ich nicht für nöthig gehalten die Bezeichnung zu ändern.

## 116.

Gleichwie im §. 5 (I) in Bezug auf die Störungen zweiter Ordnung gezeigt worden ist, könnte man hier auch die Bedingungsgleichung

$$n\frac{d\vartheta z}{d\varepsilon} = \frac{r}{a}\int T d\varepsilon + 2\frac{r}{a}\nu$$

die aus der dort abgeleiteten leicht hervorgeht, zur Controle der durch die eben entwickelten Ausdrücke zu berechnenden Verbesserungen von $n\vartheta z$ und $\nu$ anwenden, allein diese Rechnungen sind so einfach und gewähren anderweitige Controlen, weshalb ich die Entwickelung der vorstehenden Gleichung hier übergehen werde, die übrigens so wenige Schwierigkeiten darbietet, dass sie wohl jeder selbst wird ausführen können. Ich gehe daher sogleich zur Entwickelung der Verbesserung der Breitenstörungen, oder mit anderen Worten zu der der Function $U$ über.

Aus dem im Art. 112 angeführten Ausdruck für $U$, verbunden mit den im Vorhergehenden angestellten Betrachtungen, geht hervor, dass für $\Delta U$ sich zuerst ein ähnlicher Ausdruck ergiebt, wie der oben für $\Delta A$ erhaltene, nemlich

$$\Delta U = \left(\frac{dU}{d\lambda}\right)\Delta\lambda + \left(\frac{dU}{d\eta}\right)\Delta\eta + \left(\frac{dU}{d\beta}\right)\Delta\beta + \left(\frac{dU}{d\varepsilon}\right)\Delta\varepsilon + \left(\frac{dU}{d\nu}\right)\Delta\nu$$
$$+ \left(\frac{dU}{d\varphi}\right)\Delta\varphi + \left(\frac{dU}{da}\right)\Delta a + \left(\frac{dU}{du}\right)\Delta u + \left(\frac{dU}{du_1}\right)\Delta u_1$$

wo die Incremente $\Delta\lambda$, $\Delta\eta$, etc. dieselben sind, wie oben. Für die Berechnung der Differentialquotienten $\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)$, $\left(\frac{dU}{d\varepsilon}\right)$ kann ich auf das verweisen, was ich oben über die Berechnung derselben Differentialquotienten von $A$ und $T$ gesagt habe, da das Verfahren im jetzigen Falle ganz dasselbe ist. Der angezogene Ausdruck von $U$ giebt ferner

Digitized by Google

$$\left(\frac{dU}{d\beta}\right)=U$$
$$\left(\frac{dU}{d\nu}\right)=2U+Y$$

wo unter $Y$ die im §. 5 (I) unter (85) eingeführte Grösse verstanden wird. Wir bekommen ferner

$$\left(\frac{dU}{d\varphi}\right)=\frac{e}{\cos\varphi}U$$
$$a\left(\frac{dU}{da}\right)=-U$$
$$\left(\frac{dU}{du}\right)=D_1''$$
$$\left(\frac{dU}{du_1}\right)=E_1''$$

wo wieder $D_1''$ und $E_1''$ dieselbe Bedeutung haben, wie im §. 5 (I). Stellen wir diese zusammen, so erhalten wir zuerst

$$\Delta U=\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)\Delta\lambda+\left(\frac{dU}{d\varepsilon}\right)\Delta\varepsilon+(2U+Y)\Delta\nu+U\frac{e.\Delta\varphi}{\cos\varphi}-U\frac{\Delta a}{a}$$
$$+D_1''\frac{\Delta u}{\cos i}+E_1''\frac{\Delta u_1}{\cos i}+U\Delta\beta+\left(\frac{dU}{d\eta}\right)\Delta\eta$$

und wenn wir wieder $\Delta\varphi$ und $\Delta a$ durch (50) eliminiren,

$$\Delta U=\left(\frac{dU}{d\lambda}\right)\Delta\lambda+\left(\frac{dU}{d\varepsilon}\right)\Delta\varepsilon+(2U+Y)\Delta\nu+D_1''\frac{\Delta u}{\cos i}+E_1''\frac{\Delta u_1}{\cos i}$$
$$+\left(\frac{dU}{d\eta}\right)\Delta\eta-U\frac{d.\Delta\eta}{d\eta}$$

Setzt man daher

$$\Pi=\left(\frac{dU}{\cos i\,d\lambda}\right)\Delta\lambda+\left(\frac{dU}{\cos i\,d\varepsilon}\right)\Delta\varepsilon+\left(\frac{2U}{\cos i}+\frac{Y}{\cos i}\right)\Delta\nu \qquad (55)$$
$$+\frac{D_1''}{\cos i}\frac{\Delta u}{\cos i}+\frac{E_1''}{\cos i}\frac{\Delta u_1}{\cos i}$$

so wird

$$\int\frac{\Delta U}{\cos i}d\varepsilon=\int\Pi d\varepsilon+\Delta\eta\int\left(\frac{dU}{\cos i\,d\eta}\right)d\varepsilon-\frac{d\Delta\eta}{d\eta}\int\frac{U}{\cos i}d\varepsilon$$

oder da $\overline{\left(\int Ud\varepsilon\right)}=u$ und $\overline{\left(\int\left(\frac{dU}{d\eta}\right)d\varepsilon\right)}=u_1$ ist,

$$\frac{\Delta u}{\cos i}=\left(\overline{\int\Pi d\varepsilon}\right)+\frac{u_1}{\cos i}\Delta\varepsilon-\frac{u}{\cos i}\frac{d.\Delta\varepsilon}{d\varepsilon} \qquad (56)$$

wo in Bezug auf $\Delta u$ linker Hand des Gleichheitszeichens dieselbe Bemerkung gilt, die im vor. Art. in Bezug auf $\Delta\nu$ gemacht wurde. Im zweiten und dritten Gliede rechter Hand müssen hier die numerischen Werthe von $u_1$ und $u$ angewandt werden, die die erste Annäherung gegeben hat.

Digitized by Google

117.

Die den vorstehenden Integralen hinzuzufügenden willkührlichen Constanten haben dieselbe Form, wie die im Vorhergehenden eingeführten, und werden, falls sie merklich werden sollten, auf dieselbe Art bestimmt.

Zwischen den durch die eben entwickelten Ausdrücke sich ergebenden Verbesserungen der Coefficienten der Säcularänderungen finden einige Relationen statt, die zu kennen nützlich ist, da sie mit zur Controle der Rechnung dienen können. Da die durch diese Ausdrücke erlangten Verbesserungen genau dieselbe Form haben müssen, wie die in der ersten Annäherung erhaltenen Coefficienten, so darf vor Allem in dem Resultat kein $\varepsilon^2$ oder $n^2 f^2$ proportionales Glied vorkommen, sondern die Coefficienten dieses Gliedes, die sich in einigen Theilen des Ausdrucks (52) zeigen, müssen sich in der Summe dieser Theile strenge aufheben. Da ferner in der ersten Annäherung in $n\delta z$ die Säcularänderungen die folgende Form haben,

$$\left(1-\frac{e^2}{2}\right)H(0.s)\,\varepsilon\sin\varepsilon + H(0.c)\,\varepsilon\cos\varepsilon$$
$$-\frac{e}{4}\,H(0.s)\,\varepsilon\sin 2\varepsilon - \frac{e}{4}H(0.c)\,\varepsilon\cos 2\varepsilon$$

in $\nu$ die folgende

$$-\frac{e}{2}\,H(0.s)\,\varepsilon$$
$$-\tfrac{1}{2}\,H(0.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon + \tfrac{1}{2}H(0.c)\,\varepsilon\sin\varepsilon$$

und in $\frac{u}{\cos i}$ die folgende

$$-e\,V(0.s)\,\varepsilon$$
$$-V(0.c)\,\varepsilon\sin\varepsilon + V(0.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon$$

so müssen die Verbesserungen dieser Coefficienten, die durch die vorstehenden Ausdrücke erhalten werden, dieselben Relationen darbieten. Seien $\Delta H(0.s)$ und $\Delta H(0.c)$ die erhaltenen Verbesserungen von $H(0.s)$ und $H(0.c)$ und $\Delta V(0.c)$ und $\Delta V(0.s)$ die von $V(0.c)$ und $V(0.s)$, und wie vorher $\Delta\varphi$ die Verbesserung des Excentricitätswinkels, dann müssen, mit Weglassung der Quadrate und Producte der Verbesserungen, die verbesserten Säcularänderungen die folgenden werden, in $n\delta z$

$$\left(1-\frac{(e+\cos\varphi\,\Delta\varphi)^2}{2}\right)\left(H(0.s)+\Delta H(0.s)\right)\varepsilon\sin\varepsilon + \left(H(0.c)+\Delta H(0.c)\right)\varepsilon\cos\varepsilon$$
$$-\frac{(e+\cos\varphi\,\Delta\varphi)}{4}\left(H(0.s)+\Delta H(0.s)\right)\varepsilon\sin 2\varepsilon - \frac{(e+\cos\varphi\,\Delta\varphi)}{4}\left(H(0.c)+\Delta H(0.c)\right)\varepsilon\cos 2\varepsilon;$$

Digitized by Google

in $\nu$

$$-\tfrac{(e+\cos\varphi\,\Delta\varphi)}{2}(H(0.s)+\Delta H(0.s))\,\varepsilon$$
$$-\tfrac{1}{2}(H(0.s)+\Delta H(0.s))\,\varepsilon\cos\varepsilon+\tfrac{1}{2}(H(0.c)+\Delta H(0.c))\,\varepsilon\sin\varepsilon$$

und in $\frac{u}{\cos i}$

$$-(e+\cos\varphi\,\Delta\varphi)(V(0.s)+\Delta V(0.s))\,\varepsilon$$
$$-(V(0.c)+\Delta V(0.c))\,\varepsilon\sin\varepsilon+(V(0.s)+\Delta V(0.s))\,\varepsilon\cos\varepsilon$$

und daher in Bezug auf diese Glieder die folgenden Ausdrücke sich ergeben,

$$\Delta n\delta z=\left\{\left(1-\tfrac{e^2}{2}\right)\Delta H(0.s)-e\cos\varphi\,H(0.s)\,\Delta\varphi\right\}\varepsilon\sin\varepsilon+\Delta H(0.c)\,\varepsilon\cos\varepsilon$$
$$-\tfrac{1}{4}\{e\Delta H(0.s)+\cos\varphi\,H(0.s)\,\Delta\varphi\}\,\varepsilon\sin 2\varepsilon-\tfrac{1}{4}\{e\Delta H(0.c)+\cos\varphi\,H(0.c)\,\Delta\varphi\}\,\varepsilon\cos 2\varepsilon$$

$$\Delta\nu=-\tfrac{1}{2}\{e\Delta H(0.s)+\cos\varphi\,H(0.s)\Delta\varphi\}\,\varepsilon$$
$$-\tfrac{1}{2}\Delta H(0.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon+\tfrac{1}{2}\Delta H(0.c)\,\varepsilon\sin\varepsilon$$

$$\frac{\Delta u}{\cos i}=-\{e\Delta V(0.s)+\cos\varphi\,V(0.s)\Delta\varphi\}\,\varepsilon$$
$$-\Delta V(0.c)\,\varepsilon\sin\varepsilon+\Delta V(0.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon$$

Um zu zeigen, dass die Ausdrücke (52), (54) und (56) in der That die Säcularänderungen in dieser Form geben, will ich sie daraus direct entwickeln.

## 118.

Ich sehe fürerst die Entwickelung der im Vorhergehenden mit $L$ bezeichneten, und durch den Ausdruck (51) gegebenen Function als ausgeführt an, und hebe daraus die folgenden Glieder aus,

$$L=F'(0.s)$$
$$+G'(1.s)\cos(-\eta+\varepsilon)$$
$$-H'(0.c)\sin\eta+H(0.s)\cos\eta$$

die die einzigen dieser Function sind, welche zu den Säcularänderungen beitragen. Wir bekommen hieraus

$$\overline{\left(\int L d\varepsilon\right)}=F'(0.s)\,\varepsilon+H'(0.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon-H'(0.c)\,\varepsilon\sin\varepsilon$$
$$\overline{\left(\frac{d\int L d\varepsilon}{d\eta}\right)}=-G'(1.s)-H'(0.s)\,\varepsilon\sin\varepsilon-H'(0.c)\,\varepsilon\cos\varepsilon$$

Aus §. 5 (II) bekommen wir ferner mit bloser Rücksicht auf die hier erforderlichen Glieder

Digitized by Google

$$\left(\frac{dW_0}{d\eta}\right) = -G(1.s) \\ -H(0.s)\varepsilon\sin\varepsilon - H(0.c)\varepsilon\cos\varepsilon$$

$$2(\overline{W_0}+\nu) = 2k + 2C + 2G(1.c) \\ +H(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon - H(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon$$

$$W_0 = \tfrac{1}{2}eH(0.s)\varepsilon \\ +H(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon - H(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon$$

$$\left(\frac{d^2W_0}{d\eta^2}\right) + 2(\overline{W_0}+\nu) = 2k + 2C + G(1.c) \\ +\{2F(1.c) + G(2.c) + H(0.c)\}\cos\varepsilon + \{2F(1.s) + G(2.s) + H(0.s)\}\sin\varepsilon$$

Setzt man nun zur Abkürzung

$$\alpha = \frac{\Delta a}{a},\ \beta = \frac{\Delta q}{\cos q},\ \gamma = \frac{\Delta\chi}{\cos q}$$

so geben die Ausdrücke (45), (49), (53)

$$\Delta\varepsilon = \gamma + \beta\sin\varepsilon - e\gamma\cos\varepsilon$$

$$\Delta\nu = \alpha - e\beta - \beta\cos\varepsilon - e\gamma\sin\varepsilon$$

$$2\frac{\Delta h}{h} = -\alpha + 2e\beta$$

$$k = e\beta - \beta\cos\varepsilon$$

und hiemit bekommt man die folgenden Producte

$$\left(\frac{dW_0}{d\eta}\right)\Delta\varepsilon = \{-\tfrac{1}{2}\beta H(0.s) + \tfrac{1}{2}e\gamma H(0.c)\}\varepsilon \\ -\gamma H(0.c)\varepsilon\cos\varepsilon - \gamma H(0.s)\varepsilon\sin\varepsilon \\ +\{\tfrac{1}{2}\beta H(0.s) + \tfrac{1}{2}e\gamma H(0.c)\}\varepsilon\cos 2\varepsilon + \{-\tfrac{1}{2}\beta H(0.c) + \tfrac{1}{2}e\gamma H(0.s)\}\varepsilon\sin 2\varepsilon$$

$$2(\overline{W_0}+\nu)\Delta\nu = \{-\tfrac{1}{2}\beta H(0.s) + \tfrac{1}{2}e\gamma H(0.c)\}\varepsilon \\ +(\alpha - e\beta)H(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon - (\alpha - e\beta)H(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon \\ +\{-\tfrac{1}{2}\beta H(0.s) - \tfrac{1}{2}e\gamma H(0.c)\}\varepsilon\cos 2\varepsilon + \{\tfrac{1}{2}\beta H(0.c) - \tfrac{1}{2}e\gamma H(0.s)\}\varepsilon\sin 2\varepsilon$$

$$\frac{r}{a}\left[\left(\int L d\varepsilon\right) + \left(\frac{dW_0}{d\eta}\right)\Delta\varepsilon + 2(\overline{W_0}+\nu)\Delta\nu\right] = \\ \{F'(0.s) - \tfrac{1}{2}eH'(0.s) - \tfrac{1}{2}e\alpha H(0.s) - \beta(1-\tfrac{1}{2}e^2)H(0.s) + \tfrac{1}{2}e\gamma H(0.c)\}\varepsilon \\ +\{H'(0.s) - eF'(0.s) + \alpha H(0.s) - \gamma(1+e^2)H(0.c)\}\varepsilon\cos\varepsilon \\ -\{H'(0.c) + (\alpha - e\beta)H(0.c) + \gamma H(0.s)\}\varepsilon\sin\varepsilon \\ -\tfrac{1}{2}\{eH'(0.s) + (e\alpha - e^2\beta)H(0.s) - e\gamma H(0.c)\}\varepsilon\cos 2\varepsilon \\ +\tfrac{1}{2}\{eH'(0.c) + (e\alpha - e^2\beta)H(0.c) + e\gamma H(0.s)\}\varepsilon\sin 2\varepsilon$$

$$\overline{W_0}k = -\tfrac{1}{2}\beta(1-e^2)H(0.s)\varepsilon \\ +\tfrac{1}{2}e\beta H(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon - e\beta H(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon \\ -\tfrac{1}{2}\beta H(0.s)\varepsilon\cos 2\varepsilon + \tfrac{1}{2}\beta H(0.c)\varepsilon\sin 2\varepsilon$$

Digitized by Google

Substituirt man diese Ausdrücke in (52), so ergiebt sich nach der Integration

$$\begin{aligned}\Delta n\delta z = {} & \tfrac{1}{4}\{F'(0.s) - \tfrac{1}{4}eH'(0.s) - \tfrac{1}{4}e\alpha H(0.s) - (\tfrac{3}{8} - e^2)\beta H(0.s) + \tfrac{3}{4}e\gamma H(0.c)\}\varepsilon^2 \\ & + \{H'(0.s) - eF'(0.s) + \alpha H(0.s) + \tfrac{1}{2}e\beta H(0.s) - (1+e^2)\gamma H(0.c)\}\varepsilon\sin\varepsilon \\ & \qquad + \{H'(0.c) + \alpha H(0.c) + \gamma H(0.s)\}\varepsilon\cos\varepsilon \\ & - \tfrac{1}{4}\{eH'(0.s) + e\alpha H(0.s) + (1-e^2)\beta H(0.s) - e\gamma H(0.c)\}\varepsilon\sin 2\varepsilon \\ & \qquad - \tfrac{1}{4}\{eH'(0.c) + e\alpha H(0.c) + (1-e^2)\beta H(0.c) + e\gamma H(0.s)\}\varepsilon\cos 2\varepsilon\end{aligned} \tag{57}$$

Man bekommt ferner die Producte

$$\begin{aligned}\left\{\overline{\left(\frac{d^2W_0}{d\eta^2}\right)} + 2(\overline{W}_0+\nu)\right\}\Delta\varepsilon = {} & \beta\{F(1.s) + \tfrac{1}{2}G(2.s) + \tfrac{1}{2}H(0.s)\} \\ & + \gamma\{2k + 2C + G(1.c) - eF(1.c) - \tfrac{1}{2}eG(2.c) - \tfrac{1}{2}eH(0.c)\} \\ 2(\overline{W}_0+\nu)\frac{\Delta\chi}{\cos q} = {} & \gamma\{2k + 2C + 2G(1.c)\} \\ & - \gamma H(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon + \gamma H(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon \\ \left(\overline{\frac{dW_0}{d\eta}}\right)\frac{\Delta a}{a} = {} & -\alpha G(1.s) - \alpha H(0.s)\varepsilon\sin\varepsilon - \alpha H(0.c)\varepsilon\cos\varepsilon\end{aligned}$$

und hiemit giebt der Ausdruck (54)

$$\begin{aligned}\Delta\nu = {} & \tfrac{1}{4}\{G'(1.s) + \alpha G(1.s) - \beta[F(1.s) + \tfrac{1}{2}G(2.s) + \tfrac{1}{2}H(0.s)] \\ & \qquad + \gamma[G(1.c) + eF(1.c) + \tfrac{1}{2}eG(2.c) + eH(0.c)]\}\varepsilon \\ & - \tfrac{1}{4}\{H'(0.s) + \alpha H(0.s) - \gamma H(0.c)\}\varepsilon\cos\varepsilon \\ & \qquad + \tfrac{1}{4}\{H'(0.c) + \alpha H(0.c) + \gamma H(0.s)\}\varepsilon\sin\varepsilon\end{aligned} \tag{58}$$

womit die bez. Ausdrücke für $\Delta n\delta z$ und $\Delta\nu$ erlangt sind.

## 119.

Um zu zeigen, dass die eben entwickelten Ausdrücke der im vorvor. Art. verlangten Form gnügen, bedarf es noch der Entwickelung der beiden Functionen

$$F'(0.s) - \tfrac{1}{4}eH'(0.s) \quad \text{und} \quad G'(1.s) + eH'(0.s)$$

die ich auf die folgende Weise ausführen werde. Aus der Form von $L$ geht hervor, dass $F'(0.s) - \tfrac{1}{4}eH'(0.s)$ das constante Glied in der Entwickelung des Products

$$(1 - e\cos\eta)L$$

ist, und dieses Glied werde ich daher zuerst entwickeln. Das mit $\Delta\lambda$ multiplicirte Glied im Ausdrucke (51) für $L$ ist hier Null, da es sich um Glieder handelt, die vom Index $i'$ unabhängig sind, die übrigen Glieder dieses Ausdrucks werde ich wie folgt stellen,

Digitized by Google

$$(59)\qquad L=\left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right)\Delta\varepsilon+V\Delta\nu+(T+X)\left(\Delta\nu+2\frac{\Delta h}{h}\right)+2T\frac{\Delta h}{h}+D\frac{u}{\cos i}+E\frac{u_1}{\cos i}$$

Im §. 5 (I) sind die folgenden Ausdrücke entwickelt

$$T=Ma\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)+Nar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

$$V=M\left(\frac{d.ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{d\varepsilon}\right)+N\left\{ar^2\left(\frac{d^2\Omega}{dr^2}\right)+ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)\right\}$$

$$X=M'a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)+N'ar\frac{d\Omega}{dr}$$

$$D=Ma^2\left(\frac{d^2\Omega}{d\varepsilon\,dZ}\right)+N\left\{a^2r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,dZ}\right)+a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\right\}$$

$$E=Ma^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)$$

wo

$$M=\frac{1}{\cos^3\varphi}\{-(3-\tfrac{3}{2}e^2)+2e\cos\varepsilon-\tfrac{1}{2}e^2\cos 2\varepsilon$$
$$+e^2\cos(\eta+\varepsilon)-3e\cos\eta+(4-e^2)\cos(\eta-\varepsilon)-e\cos(\eta-2\varepsilon)\}$$

$$N=\frac{1}{\cos^3\varphi}\{e\sin\varepsilon-\tfrac{1}{2}e^2\sin 2\varepsilon$$
$$+e^2\sin(\eta+\varepsilon)-e\sin\eta-(2-e^2)\sin(\eta-\varepsilon)+e\sin(\eta-2\varepsilon)\}$$

$$M'=\frac{1}{\cos^3\varphi}\{-2e^2+2e\cos\varepsilon-e^2\cos(\eta+\varepsilon)+2e\cos\eta-(2-e^2)\cos(\eta-\varepsilon)\}$$

$$N'=\frac{1}{\cos^3\varphi}\{2e\sin\varepsilon-e^2\sin(\eta+\varepsilon)+(2-e^2)\sin(\eta-\varepsilon)\}$$

ist. Bezeichnen wir nun der Kürze wegen die Function $1-e\cos\eta$ mit $A$, bilden die Producte $MA$, $NA$, etc., und nehmen dabei nur auf die von $\eta$ unabhängigen Glieder in denselben Rücksicht, da die von $\eta$ abhängigen zu dem zu suchenden constanten Gliede nichts beitragen können, so ergiebt sich mit wenig Mühe,

$$AM=-3,\qquad AN=0,$$
$$AM'=\frac{1}{\cos^3\varphi}\{-3e^2+3e\cos\varepsilon\},\ AN'=\frac{3e}{\cos^3\varphi}\sin\varepsilon$$

Es wird also hier

$$AT=-3a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$$

und hieraus folgt

$$A\left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right)=-3a\left(\frac{d^2\Omega}{d\varepsilon^2}\right)$$

ferner wird

$$AV=-3\left(\frac{d.ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{d\varepsilon}\right)$$

$$A(T+X)=\frac{1}{\cos^3\varphi}\{-3+3e\cos\varepsilon\}a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)+\frac{3e}{\cos^3\varphi}\sin\varepsilon\ ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

Multiplicirt man diese Ausdrücke bez. mit den Ausdrücken des vor. Art. für $\Delta\varepsilon$ und $\Delta\nu$, sowie mit

$$\Delta\nu+2\frac{\Delta h}{h}=e\beta-\beta\cos\varepsilon-e\gamma\sin\varepsilon$$

Digitized by Google

so bekommt man

$$A\left(\frac{dT}{da}\right)\Delta\varepsilon = \{-3\gamma - 3\beta\sin\varepsilon + 3e\gamma\cos\varepsilon\}\, a\left(\frac{d^2\Omega}{d\varepsilon^2}\right)$$

$$AV\Delta\nu = \{-3\alpha + 3e\beta + 3\beta\cos\varepsilon + 3e\gamma\sin\varepsilon\}\left(\frac{d.ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{d\varepsilon}\right)$$

$$A(T+X)\left(\Delta\nu + 2\frac{\Delta h}{h}\right) = \frac{1}{\cos^2 q}\left\{\begin{array}{l} -\frac{3}{2}e\beta + 3(1+e^2)\beta\cos\varepsilon + 3e\gamma\sin\varepsilon \\ -\frac{3}{2}e\beta\cos 2\varepsilon - \frac{3}{2}e^2\gamma\sin 2\varepsilon \end{array}\right\} a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$$

$$+\frac{1}{\cos^2 q}\left\{\begin{array}{l} -\frac{3}{2}e^2\gamma + 3e^2\beta\sin\varepsilon \\ -\frac{3}{2}e\beta\sin 2\varepsilon + \frac{3}{2}e^2\gamma\cos 2\varepsilon \end{array}\right\} ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

Aus dem Art. 38 (II) sind jetzt die folgenden Glieder zu entnehmen,

$$a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right) = -b(1.c)\sin\varepsilon + b(1.s)\cos\varepsilon - b(2.c)\sin 2\varepsilon + b(2.s)\cos 2\varepsilon$$

$$ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right) = \tfrac{1}{2}c(0.c) + c(1.c)\cos\varepsilon + c(1.s)\sin\varepsilon + c(2.c)\cos 2\varepsilon + c(2.s)\sin 2\varepsilon$$

woraus

$$a\left(\frac{d^2\Omega}{d\varepsilon^2}\right) = -b(1.c)\cos\varepsilon - b(1.s)\sin\varepsilon$$

$$\left(\frac{d.ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{d\varepsilon}\right) = -c(1.c)\sin\varepsilon + c(1.s)\cos\varepsilon$$

folgt. Substituirt man diese in die vorstehenden Ausdrücke, multiplicirt, und behält blos die constanten Glieder bei, so wird

$$A\left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right)\Delta\varepsilon = \tfrac{3}{2}\beta b(1.s) - \tfrac{3}{2}e\gamma b(1.c)$$

$$AV\Delta\nu = \tfrac{3}{2}\beta c(1.s) - \tfrac{3}{2}e\gamma c(1.c)$$

$$A(T+X)\left(\Delta\nu + 2\frac{\Delta h}{h}\right) = \frac{\beta}{\cos^2 q}\left\{\begin{array}{l} \frac{3}{2}(1+e^2)b(1.s) - \frac{3}{4}eb(2.s) \\ +\frac{3}{4}e^2c(1.s) - \frac{3}{4}ec(2.s) \end{array}\right\}$$

$$+\frac{\gamma}{\cos^2 q}\left\{\begin{array}{l} -\frac{3}{4}eb(1.c) + \frac{3}{4}e^2b(2.c) \\ -\frac{3}{4}e^2c(0.c) + \frac{3}{4}e^2c(2.c) \end{array}\right\}$$

Wegen der Relation $G(1.s) = -eH(0.s)$ ergiebt sich mit bloser Rücksicht auf das constante Glied aus dem Art. 46 (II)

$$A\overline{T} = -\tfrac{1}{2}eH(0.s)$$

und hiemit wird sogleich

$$2A\overline{T}\frac{\Delta h}{h} = \tfrac{1}{2}e\alpha H(0.s) - e^2\beta H(0.s)$$

Wegen $u_1 = \frac{du}{d\varepsilon}$ wird

$$Du + Eu_1 = Ma^2\left(\frac{d.u\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)}{d\varepsilon}\right) + N\left\{a^2r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,dZ}\right) + a^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\right\}$$

Digitized by Google

also

$$A(Du+Eu_1) = -3a^2\left(\frac{d.u\left(\frac{dU}{dZ}\right)}{ds}\right) = 0$$

da in dem Differentialquotienten kein constantes Glied vorhanden sein kann. Addiren wir nun die eben entwickelten Ausdrücke, so wird zufolge (59)

$$\begin{aligned} AL = {} & \frac{\beta}{\cos^2\varphi}\left\{\begin{matrix} 3b(1.s) - \frac{3}{4}eb(2.s) \\ +\frac{3}{2}c(1.s) - \frac{3}{4}ec(2.s)\end{matrix}\right\} \\ & + \frac{e\gamma}{\cos^2\varphi}\left\{\begin{matrix} -(3-\frac{3}{2}e^2)b(1.c) + \frac{3}{4}eb(2.c) \\ -\frac{3}{4}ec(0.c) - \frac{3}{4}(1-e^2)c(1.c) + \frac{3}{4}ec(2.c)\end{matrix}\right\} \\ & + \tfrac{1}{2}e\alpha H(0.s) - e^2\beta H(0.s) \\ & = F''(0.s) - \tfrac{1}{2}eH'(0.s) \end{aligned}$$

Aber die Gleichungen (15) (II) geben

$$\begin{aligned} H(0.s) &= \frac{1}{\cos^2\varphi}\left\{\begin{matrix} 2b(1.s) & -\frac{1}{2}eb(2.s) \\ +c(1.s) & -\frac{1}{2}ec(2.s)\end{matrix}\right\} \\ H(0.c) &= \frac{1}{\cos^2\varphi}\left\{\begin{matrix} (2-e^2)b(1.c) & -\frac{1}{2}eb(2.c) \\ +\frac{1}{2}ec(0.c) + (1-e^2)c(1.c) & -\frac{1}{2}ec(2.c)\end{matrix}\right\} \end{aligned}$$

und es wird also

$$F''(0.s) - \tfrac{1}{2}eH'(0.s) = \tfrac{1}{2}e\alpha H(0.s) + (\tfrac{3}{2}-e^2)\beta H(0.s) - \tfrac{3}{2}e\gamma H(0.c)$$

woraus hervorgeht, dass der Coefficient von $\varepsilon^2$ des Ausdrucks (57) in der That gleich Null ist, wie im Art. 117 verlangt wurde. Eliminiren wir durch Hülfe der vorstehenden Gleichung $F''(0.s)$ aus dem Coefficienten von $\varepsilon\sin\varepsilon$ in (57), so wird dieser Coefficient

$$(1-\tfrac{1}{2}e^2)H'(0.s) + (1-\tfrac{1}{2}e^2)\alpha H(0.s) - (e-e^3)\beta H(0.s) - (1-\tfrac{1}{2}e^2)\gamma H(0.c)$$

Setzt man daher $\quad \Delta H(0.c) = H'(0.c) + \alpha H(0.c) + \gamma H(0.s)$

$$\Delta H(0.s) = H'(0.s) + \alpha H(0.s) - \gamma H(0.c)$$

so wird (57)

(60) $$\begin{aligned} \Delta n\delta z = {} & \{(1-\tfrac{1}{2}e^2)\Delta H(0.s) - \beta e\cos^2\varphi H(0.s)\}\varepsilon\sin\varepsilon + \Delta H(0.c)\varepsilon\cos\varepsilon \\ & - \tfrac{1}{4}\{e\Delta H(0.s) + \beta\cos^2\varphi H(0.s)\}\varepsilon\sin 2\varepsilon - \tfrac{1}{4}\{e\Delta H(0.c) + \beta\cos^2\varphi H(0.c)\}\varepsilon\cos 2\varepsilon \end{aligned}$$

mit der im Art. 117 verlangten Form übereinstimmend, da $\beta = \frac{d\varphi}{\cos\varphi}$ ist.

## 120.

Es ist klar, dass die Function $G'(1.s) + eH'(0.s)$ dem constanten Gliede der Entwickelung des Products

$$2(\cos(\eta_1 - \varepsilon) + e\cos\eta_1)L$$

Digitized by Google

gleich ist, und wir müssen daher jetzt dieses Glied entwickeln. Die oben angeführten Ausdrücke für $M$ und $N$ geben

$$\left(\frac{dM}{d\varepsilon}\right) = \frac{1}{\cos^2\varphi}\{-2e\sin\varepsilon + e^2\sin 2\varepsilon - e^2\sin(\eta+\varepsilon) + (4-e^2)\sin(\eta-\varepsilon) - 2e\sin(\eta-2\varepsilon)\}$$

$$\left(\frac{dN}{d\varepsilon}\right) = \frac{1}{\cos^2\varphi}\{e\cos\varepsilon - e^2\cos 2\varepsilon + e^2\cos(\eta+\varepsilon) + (2-e^2)\cos(\eta-\varepsilon) - 2e\cos(\eta-2\varepsilon)\}$$

Multipliciren wir zuerst diese mit dem Factor $2(\cos(\eta-\varepsilon) + e\cos\eta)$, den ich zur Abkürzung $B$ nennen werde, und nehmen in dem Product wieder nur die von $\eta$ unabhängigen Glieder auf, so ergiebt sich

$$B\left(\frac{dM}{d\varepsilon}\right) = -\frac{2e}{\cos^2\varphi}\sin\varepsilon + \frac{e^2}{\cos^2\varphi}\sin 2\varepsilon$$

$$B\left(\frac{dN}{d\varepsilon}\right) = \frac{2-e^2}{\cos^2\varphi} - \frac{e^2}{\cos^2\varphi}\cos 2\varepsilon$$

und wir erhalten ferner

$$BM = 4, \quad BN = 0$$

$$BM' = -\frac{2-3e^2}{\cos^2\varphi} - \frac{e^2}{\cos^2\varphi}\cos 2\varepsilon$$

$$BN' = -\frac{2e}{\cos^2\varphi}\sin\varepsilon - \frac{e^2}{\cos^2\varphi}\sin 2\varepsilon$$

$$B\overline{T} = 0$$

Setzt man nun die Entwickelungen auf dieselbe Art fort wie im vor. Art., so ergiebt sich

$$B\left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right)\Delta\varepsilon = \frac{1}{\cos^2\varphi}\{\beta[-e+\tfrac{1}{2}e^3\cos\varepsilon + e\cos 2\varepsilon - \tfrac{1}{2}e^2\cos 3\varepsilon] + \gamma[-(2e+\tfrac{1}{2}e^3)\sin\varepsilon + 2e^2\sin 2\varepsilon - \tfrac{1}{2}e^3\sin 3\varepsilon]\}\, a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$$
$$+ \frac{1}{\cos^2\varphi}\{\beta[(2-\tfrac{1}{2}e^2)\sin\varepsilon - \tfrac{1}{2}e^2\sin 3\varepsilon] + \gamma[(2-e^2)-(2e-\tfrac{3}{2}e^2)\cos\varepsilon - e^2\cos 2\varepsilon + \tfrac{1}{2}e^3\cos 3\varepsilon]\}\, ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$
$$+ \{\tfrac{1}{2}\beta\sin\varepsilon + \tfrac{1}{2}\gamma - \tfrac{1}{2}\gamma e\cos\varepsilon\}\, a\left(\frac{d^2\Omega}{d\varepsilon^2}\right)$$

$$BV\Delta\nu = -\{\tfrac{1}{2}\beta\cos\varepsilon + \tfrac{1}{2}\gamma e\sin\varepsilon\}\left(\frac{d.ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{d\varepsilon}\right)$$

$$B(T+X)\left(\Delta\nu + 2\frac{\Delta h}{h}\right) =$$
$$\frac{1}{\cos^2\varphi}\{\beta[(2e-e^2)-(2-\tfrac{3}{2}e^2)\cos\varepsilon - e^2\cos 2\varepsilon + \tfrac{1}{2}e^2\cos 3\varepsilon] + \gamma[-(2e-\tfrac{1}{2}e^3)\sin\varepsilon + \tfrac{1}{2}e^3\sin 3\varepsilon]\}\, a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$$
$$+ \frac{1}{\cos^2\varphi}\{\beta[-\tfrac{3}{2}e^2\sin\varepsilon + (e-e^3)\sin 2\varepsilon + \tfrac{1}{2}e^2\sin 3\varepsilon] + \gamma[e^2 + \tfrac{1}{2}e^3\cos\varepsilon - e^2\cos 2\varepsilon - \tfrac{1}{2}e^3\cos 3\varepsilon]\}\, ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$



Digitized by Google

Da die übrigen Glieder von $BL$ Nichts geben, so wird zuerst, wenn wir auch diejenigen constanten Glieder der vorstehenden Ausdrücke weglassen, die auch Nichts geben können,

$$BL = \{\beta[-2\cos\varepsilon + e\cos 2\varepsilon] + \frac{\gamma}{\cos^2\varphi}[-4e\sin\varepsilon + 2e^2\sin 2\varepsilon]\}a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$$
$$+\{\beta[2\sin\varepsilon + e\sin 2\varepsilon] + \frac{\gamma}{\cos^2\varphi}[2 - 2e(1-e^2)\cos\varepsilon - 2e^2\cos 2\varepsilon]\}ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$
$$+\{4\beta\sin\varepsilon - 4\gamma e\cos\varepsilon\}a\left(\frac{d^2\Omega}{d\varepsilon^2}\right)$$
$$+\{-4\beta\cos\varepsilon - 4\gamma e\sin\varepsilon\}\left(\frac{d.ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)}{d\varepsilon}\right)$$

und nach der Substitution der oben angeführten Glieder der Differentialquotienten von $\Omega$ wird das constante Glied

$$BL = \beta\begin{Bmatrix} -3b(1.s) + \frac{1}{2}eb(2.s) \\ -\ c(1.s) + \frac{1}{2}ec(2.s)\end{Bmatrix}$$
$$+\frac{\gamma}{\cos^2\varphi}\begin{Bmatrix} 4e(1-e^2)b(1.c) - e^2b(2.c) \\ +c(0.c) + e(1-e^2)c(1.c) - e^2c(2.c)\end{Bmatrix}$$
$$= G'(1.s) + eH'(0.s)$$

Suchen wir nun die constanten Glieder in den Producten von $T$ mit

$$C = 2\cos\varepsilon + \cos(\eta - 2\varepsilon) - (1 - 2e^2)\cos\eta$$

und

$$D = -2\sin(\eta - \varepsilon) + 2e\sin\varepsilon - e\sin(\eta - 2\varepsilon) - e\sin\eta$$

Durch die Multiplicationen von $M$ und $N$ mit diesen Factoren, und blose Beibehaltung der von $\eta$ unabhängigen Glieder der Producte findet man zuerst

$$CT = \{3 - 6\cos\varepsilon + e\cos 2\varepsilon\}a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right) + \{-2\sin\varepsilon + e\sin 2\varepsilon\}ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$
$$DT = \frac{1}{\cos^2\varphi}\{-(8e - 4e^3)\sin\varepsilon + 2e^2\sin 2\varepsilon\}a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$$
$$+\frac{1}{\cos^2\varphi}\{2 + 2e(1-e^2)\cos\varepsilon - 2e^2\cos 2\varepsilon\}a\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$$

und wenn man die mehrmals angewandten Ausdrücke von $a\left(\frac{d\Omega}{d\varepsilon}\right)$ und $ar\left(\frac{d\Omega}{dr}\right)$ substituirt und in den Producten blos die constanten Glieder aufnimmt, wird

$$CT = -3b(1.s) + \frac{1}{2}eb(2.s) - c(1.s) + \frac{1}{2}ec(2.s)$$
$$DT = \frac{1}{\cos^2\varphi}\{(4e - 2e^3)b(1.c) - e^2b(2.c) + c(0.c) + e(1-e^2)c(1.c) - e^2c(2.c)\}$$

Es wird also zufolge des oben erhaltenen Ausdrucks für $BL$,

$$G'(1.s) + eH'(0.s) = \beta CT + \gamma DT$$

wenn rechter Hand blos die constanten Glieder berücksichtigt werden. Unter dieser Bedingung ist aber augenscheinlich

Digitized by Google

$$CT = F(1.s) + \tfrac{1}{2}G(2.s) - (\tfrac{1}{2} - e^2)H(0.s)$$
$$DT = -G(1.c) - eF(1.c) - \tfrac{1}{2}eG(2.c) + \tfrac{1}{2}eH(0.c)$$

womit schliesslich

$$G'(1.s) + eH(0.s) = \beta\{F(1.s) + \tfrac{1}{2}G(2.s) - (\tfrac{1}{2} - e^2)H(0.s)\} - \gamma\{G(1.c) + eF(1.c) + \tfrac{1}{2}eG(2.c) - \tfrac{1}{2}eH(0.c)\}$$

erhalten wird. Eliminirt man durch diese Gleichung $G'(1.s)$ aus dem Coefficienten von $\varepsilon$ des Ausdrucks (58), und bedenkt, dass $G(1.s) = -eH(0.s)$ ist, so wird dieser Coefficient

$$-\tfrac{1}{2}\{eH(0.s) + e\alpha H(0.s) + \beta(1 - e^2)H(0.s) - e\gamma H(0.c)\}$$

Führen wir ausserdem die oben gegebenen Ausdrücke von $\Delta H(0.s)$ und $\Delta H(0.c)$ ein, so verwandelt sich (58) in

$$\Delta v = -\tfrac{1}{2}\{e\Delta H(0.s) + \beta\cos^2\varphi\, H(0.s)\}\varepsilon - \tfrac{1}{2}\Delta H(0.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon + \tfrac{1}{2}\Delta H(0.c)\,\varepsilon\sin\varepsilon \qquad (61)$$

welches die Form ist, die zufolge des Art. 117 die Säcularänderungen in $\Delta v$ haben müssen.

## 121.

Wenden wir uns jetzt zu den Breitenstörungen, und nehmen an, dass von der im Art. 116 mit $H$ bezeichneten Function die folgenden Glieder erhalten seien,

$$H = T'(0.s) + V'(0.s)\cos\eta - V'(0.c)\sin\eta$$

die die Einzigen sind, aus welchen die Verbesserungen der Säcularänderungen in $\Delta u$ hervorgehen können. Hieraus ziehen wir

$$\overline{\left(\int H d\varepsilon\right)} = T(0.s)\,\varepsilon - V'(0.c)\,\varepsilon\sin\varepsilon + V'(0.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon$$

Von $u$ entnehmen wir aus dem Art. 50 (II) die folgenden Glieder

$$\frac{u}{\cos i} = -eV(0.s)\,\varepsilon - V(0.c)\,\varepsilon\sin\varepsilon + V(0.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon$$

woraus

$$\frac{u_1}{\cos i} = -V(0.c)\,\varepsilon\cos\varepsilon - V(0.s)\,\varepsilon\sin\varepsilon$$

sich ergiebt. Multiplicirt man diese bez. mit

$$\frac{d\Delta t}{d\varepsilon} = \beta\cos\varepsilon + e\gamma\sin\varepsilon$$
$$\Delta\varepsilon = \gamma + \beta\sin\varepsilon - e\gamma\cos\varepsilon$$

so ergiebt sich



Digitized by Google

$$\frac{u_1}{\cos i}\Delta\varepsilon = \{-\tfrac{1}{2}\beta V(0.s) + \tfrac{1}{2}e\gamma V(0.c)\}\,\varepsilon$$
$$-\gamma V(0.s)\,\varepsilon\sin\varepsilon \qquad -\gamma V(0.c)\,\varepsilon\cos\varepsilon$$
$$+\{-\tfrac{1}{2}\beta V(0.c)+\tfrac{1}{2}e\gamma V(0.s)\}\,\varepsilon\sin 2\varepsilon+\{\tfrac{1}{2}\beta V(0.s)+\tfrac{1}{2}e\gamma V(0.c)\}\,\varepsilon\cos 2\varepsilon$$
$$\frac{u}{\cos i}\frac{d.\Delta i}{ds} = \{\tfrac{1}{2}\beta V(0.s) - \tfrac{1}{2}e\gamma V(0.c)\}\,\varepsilon$$
$$-e^2\gamma V(0.s)\,\varepsilon\sin\varepsilon \qquad -e\beta V(0.s)\,\varepsilon\cos\varepsilon$$
$$+\{-\tfrac{1}{2}\beta V(0.c)+\tfrac{1}{2}e\gamma V(0.s)\}\,\varepsilon\sin 2\varepsilon+\{\tfrac{1}{2}\beta V(0.s)+\tfrac{1}{2}e\gamma V(0.c)\}\,\varepsilon\cos 2\varepsilon$$

und hiemit erhalten wir

$$\frac{\Delta u}{\cos i} = \{T'(0.s) - \beta V(0.s) + e\gamma V(0.c)\}\,\varepsilon$$
$$(62)\qquad -\{V'(0.c)+\gamma(1-e^2)V(0.s)\}\,\varepsilon\sin\varepsilon+\{V'(0.s)+e\beta V(0.s)-\gamma V(0.c)\}\,\varepsilon\cos\varepsilon$$

## 122.

Wir haben jetzt die Function

$$T'(0.s) + eV'(0.s)$$

zu bestimmen, und es ist klar, dass diese dem constanten Gliede in der Entwickelung des Products

$$(1+2e\cos\eta)\,\Pi$$

gleich sein muss. Dieses soll daher jetzt entwickelt werden. Aus §. 5 (I) haben wir

$$U = Qa^2\left(\frac{d\Omega}{dZ}\right)\cos i;\quad Y = Qa^2r\left(\frac{d^2\Omega}{dr\,dZ}\right)\cos i$$

wo

$$Q = e\sin\varepsilon - \tfrac{1}{4}e^2\sin 2\varepsilon$$
$$+\tfrac{1}{2}e^2\sin(\eta+\varepsilon) - \tfrac{1}{2}e\sin\eta + (1+\tfrac{1}{2}e^2)\sin(\eta-\varepsilon) - \tfrac{1}{2}e\sin(\eta-2\varepsilon)$$

ist. Hieraus finden wir, wenn wieder die von $\eta$ abhängigen Glieder im Product übergangen werden,

$$(1+2e\cos\eta)\,Q = 0$$

und daher wird auch

$$(1+2e\cos\eta)\,U = 0;\quad (1+2e\cos\eta)\,Y = 0$$

Es ergiebt sich ferner aus §. 5 (I), dass

$$D_1'' = PW\cos i;\quad E_1'' = PW_1\cos i$$

wo $W$ und $W_1$ von $\eta$ unabhängig sind, und

$$P = e\sin\varepsilon - e\sin\eta + \sin(\eta-\varepsilon)$$

ist. Die Multiplication giebt hier wieder in demselben Sinne wie oben

$$(1+2e\cos\eta)\,P = 0$$

woraus

$$(1+2e\cos\eta)\,D_1'' = 0;\quad (1+2e\cos\eta)\,E_1'' = 0$$

Digitized by Google

folgt. Da nun wieder für die betreffenden Glieder $\Delta\lambda = 0$ ist, so wird zufolge (55) auch

$$(1 + 2e\cos\eta)\,\Pi = 0$$

oder mit Worten: in der Entwickelung dieser Function ist kein constantes Glied vorhanden. Es ist daher auch

$$T'(0.s) + eV'(0.s) = 0$$

Eliminiren wir durch diese Gleichung $T'(0.s)$ aus dem mit $\varepsilon$ multiplicirten Gliede des Ausdrucks (62), so wird der Coefficient dieses Gliedes

$$-\{V'(0.s) + \beta V(0.s) - e\gamma V(0.c)\}$$

und setzen wir

$$\Delta V(0.s) = V(0.s) + e\beta V(0.s) - \gamma V(0.c)$$
$$\Delta V(0.c) = V(0.c) + \gamma\cos^2\varphi\, V(0.s)$$

so geht der Ausdruck (62) über in

$$\frac{\Delta u}{\cos i} = -\{e.\Delta V(0.s) + \beta\cos^2\varphi V(0.s)\}\varepsilon - \Delta V(0.c)\varepsilon\sin\varepsilon + .\Delta V(0.s)\varepsilon\cos\varepsilon \qquad (63)$$

welcher auch die Form hat, die im Art. 117 verlangt wurde.

## 123.

Bei der Anwendung des in diesem § entwickelten Verfahrens zur Verbesserung der mit fehlerhaften elliptischen Elementen berechneten Störungscoefficienten braucht man, die Säcularänderungen anbelangend, vermittelst der allgemeinen Ausdrücke (52), (54), (56), nur die in $\Delta n\delta z$ und $\Delta u$ mit $\varepsilon\sin\varepsilon$ und $\varepsilon\cos\varepsilon$ multiplicirten Glieder zu berechnen, da die übrigen, kleineren, Glieder durch die eben abgeleiteten Ausdrücke (60), (61), (63), sich aus denselben einfach ergeben. Man kann übrigens auch diese kleineren Glieder aus den eben genannten allgemeinen Formeln berechnen, und durch die zuletzt genannten Ausdrücke prüfen, ob man sie richtig berechnet hat. Wenn ausser der Verbesserung der Coefficienten der Säcularänderungen auch die anderer Störungscoefficienten merklich wird, so ist es am Einfachsten, die genannten in $\Delta n\delta z$ und $\Delta u$ mit $\varepsilon\sin\varepsilon$ und $\varepsilon\cos\varepsilon$ multiplicirten Coefficienten zugleich mit den anderen durch die in dieser Abhandlung erklärten numerischen Multiplicationen zu berechnen; sollte aber der Fall eintreffen, dass blos die Verbesserung der Coefficienten der Säcularänderungen für merklich erachtet werden kann, so wird dieses durch vollständig entwickelte Aus-

Digitized by Google

drücke der Coefficienten $H'(0.c)$, $H'(0.s)$, $V'(0.c)$, $V'(0.s)$ geschehen können. Ich werde daher diese Entwickelungen ausführen.

Aus dem für $T$ im §. 5 (II) gegebenen Ausdruck folgt mit bloser Rücksichtnahme auf die Glieder, die für unsern jetzigen Zweck in Anwendung kommen,

$$\begin{aligned}\left(\frac{dT}{d\varepsilon}\right) = &- G(1.c)\cos(-\eta_1+\varepsilon) - G(1.s)\sin(-\eta_1+\varepsilon)\\ &- H(1.c)\cos(\ \ \eta_1+\varepsilon) - H(1.s)\sin(\eta_1+\varepsilon)\end{aligned}$$

Sei ferner

$$\begin{aligned}V+X+T = &- M(1.c)\sin(-\eta_1+\varepsilon) + M(1.s)\cos(-\eta_1+\varepsilon)\\ &- N(0.c)\sin\eta_1 \qquad + N(0.s)\cos\eta_1\\ &- N(1.c)\sin(\eta_1+\varepsilon) \quad + N(1.s)\cos(\eta_1+\varepsilon)\\ T+\bar{T}+X = &- P(0.c)\sin\eta_1 \qquad + P(0.s)\cos\eta_1\\ D = &\ \ Q(1.c)\cos(-\eta_1+\varepsilon) - Q(1.s)\sin(-\eta_1+\varepsilon)\\ &+ R(0.c)\cos\eta_1 \qquad - R(0.s)\sin\eta_1\\ &+ R(1.c)\cos(\eta_1+\varepsilon) \quad - R(1.s)\sin(\eta_1+\varepsilon)\\ E = &\ \ S(1.c)\sin(-\eta_1+\varepsilon) + S(1.s)\cos(-\eta_1+\varepsilon)\\ &+ T(1.c)\sin(\eta_1+\varepsilon) \quad + T(1.s)\cos(\eta_1+\varepsilon)\end{aligned}$$

Die numerischen Werthe aller dieser Coefficienten sind bekannt, wenn man die Störungen zweiter Ordnung berechnet hat, da man alsdann die numerischen Werthe der Coefficienten nicht nur von $T$, sondern auch von $V$, $X$, $D$, $E$ kennt. Multiplicirt man nun die vorstehenden Ausdrücke nach Anleitung des Ausdrucks (51) mit

$$\begin{aligned}\Delta\varepsilon &= \gamma + \beta\sin\varepsilon - e\gamma\cos\varepsilon\\ \Delta\nu &= \alpha - e\beta - \beta\cos\varepsilon - e\gamma\sin\varepsilon\\ 2\frac{\Delta h}{h} &= -\alpha + 2e\beta\\ \frac{\Delta u}{\cos i} &= -e\mu + \lambda\sin\varepsilon + \mu\cos\varepsilon\\ \frac{\Delta u_1}{\cos i} &= \lambda\cos\varepsilon - \mu\sin\varepsilon\end{aligned}$$

wovon die beiden letzten die Ausdrücke (46) und (47) sind, so bekommt man, wenn man die Bedeutung, die $H'(0.c)$ und $H'(0.s)$ im Art. 118 beigelegt worden ist, berücksichtigt,

$$\begin{aligned}H'(0.c) = \alpha\ \{ &\quad N(0.c) - P(0.c)\}\\ +\tfrac{1}{2}\beta\ \{ &\quad G(1.c) - H(1.c) + M(1.c) - N(1.c) + 2e[2P(0.c) - N(0.c)]\}\\ +\tfrac{1}{2}e\gamma\{ &\quad G(1.s) - H(1.s) + M(1.s) - N(1.s)\}\\ +\tfrac{1}{2}\lambda\ \{ - &\ Q(1.c) + R(1.c) + S(1.c) - T(1.c)\}\\ +\tfrac{1}{2}\mu\ \{ &- 2eR(0.s) - Q(1.s) + R(1.s) + S(1.s) - T(1.s)\}\end{aligned}$$

Digitized by Google

$$
\begin{aligned}
H(0.s) = \alpha \{ & \quad N(0.s) - P(0.s) \} \\
+\tfrac{1}{2}\beta \{ & - G(1.s) - H(1.s) - M(1.s) - N(1.s) + 2e[2P(0.s) - N(0.s)] \} \\
+\tfrac{1}{2}e\gamma \{ & \quad G(1.c) + H(1.c) + M(1.c) + N(1.c) \} \\
+\tfrac{1}{2}\lambda \{ & - Q(1.s) - R(1.s) + S(1.s) + T(1.s) \} \\
+\tfrac{1}{2}\mu \{ & - 2eR(0.c) + Q(1.c) + R(1.c) - S(1.c) - T(1.c) \}
\end{aligned}
$$

## 124.

Für die Entwickelung von $V(0.c)$ und $V(0.s)$, deren Bedeutung aus dem Art. 121 erhellt, nehme ich zuerst aus dem §. 5 (II)

$$
\begin{aligned}
\left(\frac{dU}{\cos i\, d\varepsilon}\right) = & - U(1.s)\sin(-\eta+\varepsilon) - U(1.c)\cos(-\eta+\varepsilon) \\
& - V(1.s)\sin(\eta+\varepsilon) \quad - V(1.c)\cos(\eta+\varepsilon)
\end{aligned}
$$

und setze ferner

$$
\begin{aligned}
\frac{2U+Y}{\cos i} = & + A(1.s)\cos(-\eta+\varepsilon) - A(1.c)\sin(-\eta+\varepsilon) \\
& + B(0.s)\cos\eta \quad\quad - B(0.c)\sin\eta \\
& + B(1.s)\cos(\eta+\varepsilon) \quad - B(1.c)\sin(\eta+\varepsilon) \\
\frac{D'_1}{\cos i} = & - C(1.s)\sin(-\eta+\varepsilon) + C(1.c)\cos(-\eta+\varepsilon) \\
& - D(0.s)\sin\eta \quad\quad + D(0.c)\cos\eta \\
& - D(1.s)\sin(\eta+\varepsilon) \quad + D(1.c)\cos(\eta+\varepsilon) \\
\frac{E'_1}{\cos i} = & \quad E(1.s)\cos(-\eta+\varepsilon) + E(1.c)\sin(-\eta+\varepsilon) \\
& + F(1.s)\cos(\eta+\varepsilon) \quad + F(1.c)\sin(\eta+\varepsilon)
\end{aligned}
$$

wo die numerischen Werthe der Coefficienten auch bekannt sind. Multiplicirt man diese mit den im vor. Art. angegebenen Factoren nach Maassgabe des Ausdrucks (55), so bekommt man

$$
\begin{aligned}
V'(0.s) = & \alpha B(0.s) \\
& + \tfrac{1}{2}\beta \{ - U(1.s) - V(1.s) - A(1.s) - B(1.s) - 2eB(0.s) \} \\
& + \tfrac{1}{2}e\gamma \{ \quad U(1.c) + V(1.c) + A(1.c) + B(1.c) \} \\
& + \tfrac{1}{2}\lambda \{ - C(1.s) - D(1.s) + E(1.s) + F(1.s) \} \\
& + \tfrac{1}{2}\mu \{ - 2eD(0.c) + C(1.c) + D(1.c) - E(1.c) - F(1.c) \} \\
V'(0.c) = & \alpha B(0.c) \\
& + \tfrac{1}{2}\beta \{ \quad U(1.c) - V(1.c) + A(1.c) - B(1.c) - 2eB(0.c) \} \\
& + \tfrac{1}{2}e\gamma \{ \quad U(1.s) - V(1.s) + A(1.s) - B(1.s) \} \\
& + \tfrac{1}{2}\lambda \{ - C(1.c) + D(1.c) + E(1.c) - F(1.c) \} \\
& + \tfrac{1}{2}\mu \{ - 2eD(0.s) - C(1.s) + D(1.s) + E(1.s) - F(1.s) \}
\end{aligned}
$$

Digitized by Google

## 125.

Die bis hieher abgehandelte Verbesserung der Störungscoefficienten ist nur ein Theil der ganzen Verbesserung, indem noch die Verbesserung zu berücksichtigen ist, die $\Delta n$ in den Integrationsdivisoren bewirkt. Diese muss hier ein wenig anders ausgeführt werden, wie die im Art. 56 (II) erklärte, die von dem Unterschiede zwischen dem osculirenden und dem wahren Werthe der mittleren Bewegung herrührte. Während dort zwischen dem $n_0$ der Zähler und dem $n$ der Nenner unterschieden werden musste, muss hier dieser Unterschied wegfallen, oder es müssen mit anderen Worten die Integrationsdivisoren grade so genommen werden, wie sie in der Berechnung der Störungscoefficienten angewandt werden. Nennen wir daher wieder im Allgemeinen $F$ die Function, deren Integral wegen $\Delta n$ zu verbessern ist, so muss die Variation von

$$\int F d\varepsilon = \frac{\gamma_c}{i - i'\mu} \sin\{(i - i'\mu)\varepsilon + A\} - \frac{\gamma_s}{i - i'\mu} \cos\{(i - i'\mu)\varepsilon + A\}$$

angewandt werden, und diese wird

$$\Delta \int F d\varepsilon = \varphi(i,i') \int F d\varepsilon$$

wo

$$\varphi(i,i') = -\frac{i'\mu}{i - i'\mu} \cdot \frac{\Delta n}{n}$$

ist, und sich, abgesehen von dem Werthe von $\Delta n$, von der a. a. O. mit $f(i,i')$ bezeichneten Grösse blos dadurch unterscheidet, dass $i'\mu$ statt $i$ im Zähler enthalten ist. Es sind nun die Ausdrücke des Art. 56 (II) für $\Delta P(i,i')$, etc. mit der Abänderung anzuwenden, dass darin $\varphi(i,i')$ statt $f(i,i')$ substituirt werden muss. Setzt man daher hier

$$\Delta P(i,i') = \left(\frac{F(i,i')}{i - i'\mu}\right) \varphi(i,i') + \left(\frac{G(i+1,i')}{i+1-i'\mu}\right) \varphi(i+1,i') + \left(\frac{H(i-1,i')}{i-1-i'\mu}\right) \varphi(i-1,i')$$

$$\Delta Q(i,i') = \left(\frac{G(i+1,i')}{i+1-i'\mu}\right) \varphi(i+1,i') - \left(\frac{H(i-1,i')}{i-1-i'\mu}\right) \varphi(i-1,i')$$

$$\Delta R(i,i') = R(i,i') \varphi(i,i') + \frac{\Delta P(i,i') - \frac{e}{2} \Delta P(i+1,i') - \frac{e}{2} \Delta P(i-1,i')}{i - i'\mu}$$

$$\Delta S(i,i') = S(i,i') \varphi(i,i') + \frac{\Delta Q(i,i')}{i - i'\mu}$$

$$\Delta Y(i,i') = \left(\frac{T(i,i')}{i - i'\mu}\right) \varphi(i,i') + \left(\frac{U(i+1,i')}{i+1-i'\mu}\right) \varphi(i+1,i') + \left(\frac{V(i-1,i')}{i-1-i'\mu}\right) \varphi(i-1,i')$$

so werden die Verbesserungen

Digitized by Google

$$\Delta n\delta z = \Sigma\Delta R(i,i',c)\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\} - \Sigma\Delta R(i,i',s)\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\}$$
$$\Delta\nu = \tfrac{1}{4}\Sigma\Delta S(i,i',c)\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\} + \tfrac{1}{4}\Sigma\Delta S(i,i',s)\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\}$$
$$\frac{\Delta u}{\cos i} = \Sigma\Delta Y(i,i',s)\sin\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\} + \Sigma\Delta Y(i,i',s)\cos\{(i-i'\mu)\varepsilon+A\}$$

## 126.

Ich komme jetzt zur Anwendung des vorhergehenden Inhalts dieses § auf unser Beispiel. Aus den im Art. 109 gefundenen Verbesserungen der unserm Beispiel zu Grunde gelegten osculirenden Elemente ergab sich in der Bedeutung der Artt. 118 und 111, *)

$$\log\alpha = 6.4303;\ \log\beta = 6.3528;\ \log\gamma = 7.1446n$$
$$\log\lambda = 4.625n;\ \log\mu = 5.433;$$

und hiemit erhält man

$$\Delta\varepsilon = -(7.1446) + 2(6.0518)\sin\varepsilon + 2(5.7724)\cos\varepsilon$$
$$\Delta\nu = (6.3983) - 2(6.0518)\cos\varepsilon + 2(5.7724)\sin\varepsilon$$
$$2\frac{\Delta h}{h} = -(6.3638)$$
$$\frac{\Delta u}{\cos i} = -(4.362) - 2(4.324)\sin\varepsilon + 2(5.132)\cos\varepsilon$$
$$\frac{\Delta u_1}{\cos i} = -2(4.324)\cos\varepsilon - 2(5.132)\sin\varepsilon$$

Durch den Ausdruck (48) ergab sich

$$\Delta\lambda = (5.6528)$$

und durch (53)

$$k = (5.2816) - 2(6.0518)\cos\varepsilon$$

In diesen Ausdrücken sind die in Klammern eingeschlossenen Zahlen die Logarithmen der Coefficienten, und alle sind in Theilen des Radius angesetzt.

## 127.

Die numerischen Werthe der Factoren, mit welchen die eben berechneten Functionen multiplicirt werden müssen, sind alle im Vorhergehenden entweder ohne Weiteres enthalten, oder können durch einfache Additionen daraus erhalten werden, ich lasse daher sogleich die für den Ausdruck (51) erforderlichen Producte folgen.

*) Wegen des geringen Betrages von $\Delta\theta$ in diesem Beispiel durfte hier $\Delta\chi = \Delta\pi$ gesetzt werden, während $\Delta\chi = \Delta\pi - 2\sin^2\frac{1}{2}i.\Delta\theta$ ist.

Digitized by Google

$\left(\frac{dT}{dl}\right) \Delta l$

| $i,\ i'$ | $-\sin$ | $\cos$ | $i,\ i'$ | $-\sin$ | $\cos$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0, −2 | +0".001 | −0".001 | 2, −3 | +0".007 | +0".006 |
| | 0.000 | 0.000 | | −0.002 | −0.002 |
| | −0.001 | +0.001 | | −0.00694 | −0.00572 |
| 1, −2 | −0.008 | +0.005 | 3, −3 | +0.004 | 0.000 |
| | +0.002 | −0.001 | | −0.001 | 0.000 |
| | +0.008 | −0.005 | | −0.004 | 0.000 |
| 2, −2 | −0.002 | +0.001 | 4, −3 | −0.006 | −0.005 |
| | 0.000 | 0.000 | | +0.002 | +0.001 |
| | +0.002 | −0.001 | | +0.006 | +0.005 |
| 3, −2 | +0.008 | −0.005 | 2, −4 | +0.001 | +0.004 |
| | −0.002 | +0.002 | | 0.000 | −0.001 |
| | −0.008 | +0.005 | | −0.001 | −0.004 |
| 0, −3 | 0.000 | 0.000 | 3, −4 | +0.003 | −0.005 |
| | −0.00040 | −0.00006 | | −0.001 | +0.002 |
| | 0.000 | 0.000 | | −0.003 | +0.006 |
| 1, −3 | −0.00390 | +0.00004 | 4, −4 | −0.001 | −0.004 |
| | +0.00117 | +0.00014 | | 0.000 | +0.001 |
| | +0.00123 | −0.00002 | | +0.001 | +0.005 |

| | $\left(\frac{dT}{de}\right) \Delta e$ | | $(B+T) \Delta v$ | | $C\frac{\Delta h}{h}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $i,\ i'$ | $-\sin$ | $\cos$ | $-\sin$ | $\cos$ | $-\sin$ | $\cos$ |
| 0,0,0 | | −0".00012 | | −0".00028 | | +0".00002 |
| −1,1,0 | −0".00042 | −0.03824 | +0".01712 | +0.00024 | 0".00000 | −0.00002 |
| 0,1,0 | −0.001 | +0.001 | −0.003 | −0.002 | 0.000 | 0.000 |
| −1,2,0 | −0.004 | +0.007 | +0.008 | −0.004 | 0.000 | 0.000 |
| 1,0,0 | −0.00240 | +0.00234 | −0.00597 | +0.00585 | −0.00010 | +0.00002 |
| 2,0 | −0.006 | +0.017 | +0.006 | +0.002 | | |
| | +0.002 | −0.004 | 0.000 | 0.000 | | |
| | +0.004 | −0.010 | −0.007 | −0.002 | | |
| 0, −1 | 0.000 | −0.001 | +0.001 | −0.008 | | |
| | +0.001 | −0.004 | 0.000 | −0.001 | | |
| | +0.003 | −0.004 | 0.000 | +0.010 | | |
| 1, −1 | −0.015 | +0.006 | +0.004 | +0.012 | 0.000 | −0.002 |
| | −0.013 | +0.004 | +0.001 | +0.003 | 0.000 | +0.001 |
| | 0.000 | 0.000 | −0.005 | −0.017 | 0.000 | +0.001 |
| 2, −1 | −0.004 | −0.002 | −0.008 | 0.000 | | |
| | +0.004 | +0.004 | −0.001 | −0.001 | | |
| | +0.001 | +0.002 | +0.009 | +0.002 | | |
| 3, −1 | +0.024 | +0.001 | 0.000 | −0.007 | | |
| | −0.007 | 0.000 | 0.000 | +0.004 | | |
| | −0.018 | −0.001 | 0.000 | +0.007 | | |
| 0, −2 | +0.003 | −0.001 | +0.010 | −0.003 | | |
| | −0.005 | −0.003 | −0.005 | +0.003 | | |
| | −0.002 | −0.002 | −0.006 | 0.000 | | |

Digitized by Google

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 1, −2 | −0".047 | −0".019 | −0".036 | +0".017 | +0".003 | −0".002 |
| | +0.022 | +0.015 | +0.018 | −0.006 | −0.001 | +0.001 |
| | +0.017 | +0.003 | +0.046 | −0.014 | −0.001 | +0.001 |
| 2, −2 | +0.176 | +0.254 | +0.072 | −0.059 | −0.014 | +0.010 |
| | −0.080 | −0.116 | −0.021 | +0.017 | +0.007 | −0.005 |
| | −0.092 | −0.130 | −0.059 | +0.049 | +0.007 | −0.005 |
| 3, −2 | +0.009 | −0.010 | −0.015 | +0.040 | | |
| | −0.006 | +0.002 | +0.003 | −0.012 | | |
| | −0.001 | +0.008 | +0.012 | −0.033 | | |
| 0, −3 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| | −0.00131 | −0.00195 | −0.00225 | −0.00040 | 0.00000 | −0.00002 |
| | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 1, −3 | −0.00873 | −0.00893 | −0.01361 | −0.00644 | +0.00059 | −0.00023 |
| | +0.00235 | +0.01090 | +0.00691 | +0.00269 | −0.00030 | +0.00012 |
| | +0.00353 | +0.00405 | +0.00900 | +0.00544 | −0.00030 | +0.00012 |
| 2, −3 | +0.010 | +0.106 | +0.042 | +0.034 | −0.005 | 0.000 |
| | −0.001 | −0.052 | −0.015 | −0.010 | +0.002 | 0.000 |
| | −0.00499 | −0.06139 | −0.03512 | −0.02872 | +0.00241 | +0.00011 |
| 3, −3 | +0.173 | −0.219 | −0.067 | −0.033 | +0.008 | +0.007 |
| | −0.073 | +0.092 | +0.021 | +0.016 | −0.004 | −0.003 |
| | −0.116 | +0.150 | +0.057 | +0.041 | −0.004 | −0.003 |
| 4, −3 | −0.004 | −0.011 | +0.031 | 0.000 | | |
| | 0.000 | +0.007 | −0.010 | 0.000 | | |
| | +0.004 | +0.005 | −0.027 | −0.001 | | |
| 1, −4 | 0.000 | −0.001 | −0.002 | −0.002 | | |
| | −0.001 | +0.002 | 0.000 | +0.001 | | |
| | 0.000 | 0.000 | +0.002 | 0.000 | | |
| 2, −4 | −0.006 | +0.022 | +0.002 | +0.016 | | |
| | +0.009 | −0.010 | 0.000 | −0.007 | | |
| | +0.004 | −0.013 | −0.002 | −0.012 | | |
| 3, −4 | +0.109 | −0.045 | +0.007 | −0.034 | 0.000 | +0.004 |
| | −0.047 | +0.018 | −0.002 | +0.015 | 0.000 | −0.002 |
| | −0.077 | +0.032 | −0.007 | +0.036 | 0.000 | −0.002 |
| 4, −4 | −0.193 | −0.075 | −0.006 | +0.052 | +0.002 | −0.005 |
| | +0.078 | +0.031 | +0.002 | −0.016 | −0.001 | +0.003 |
| | +0.148 | +0.055 | +0.006 | −0.046 | −0.001 | +0.003 |

| | $D\frac{\Delta u}{\cos i}$ | | $E\frac{\Delta u_s}{\cos i}$ | |
|---|---|---|---|---|
| $i, i'$ | −sin | cos | −sin | cos |
| 0,0,0 | | +0".00020 | | −0".00020 |
| −1,1,0 | +0".00118 | −0.00027 | 0".00000 | +0.00026 |
| 0,1,0 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| −1,2,0 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 1,0,0 | +0.00041 | +0.00010 | +0.00011 | −0.00004 |
| 0,−3 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| | −0.00003 | +0.00003 | −0.00012 | 0.00000 |
| | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

Digitized by Google

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| 1, −3 | +0".00066 | +0".00040 | −0".00031 | −0".00022 |
| | −0.00007 | −0.00002 | +0.00020 | +0.00014 |
| | −0.00086 | −0.00049 | +0.00020 | +0.00014 |
| 2, −3 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| | +0.00075 | +0.00005 | +0.00005 | −0.00007 |

Ueberhaupt weiter zu gehen wie bis $i'=4$ hielt ich in dieser Rechnung für unnöthig, da die Verbesserungen der Störungscoefficienten, mit Ausnahme derer, die den kleinsten Divisor erhalten, ersichtlich sehr klein ausfallen werden.

Aus den vorstehenden Werthen ergab sich durch Addition und Integration

$$\int L d\varepsilon$$

| $i, i$ | cos | sin | $i, i'$ | cos | sin |
|---|---|---|---|---|---|
| 0,0,0 | −0".00038 $\varepsilon$ | | 3, −2 | +0".001 | +0".011 |
| −1,1,0 | +0.01788 | −0".03802 | | −0.002 | −0.002 |
| 0,1,0 | −0.004 | −0.001 | | +0.002 | −0.015 |
| −1,2,0 | +0.002 | +0.002 | 0, −3 | 0.000 | 0.000 |
| 1,0,0 | +0.00827 $\varepsilon$ | +0.00795 $\varepsilon$ | | +0.091 | +0.053 |
| 2,0 | 0.000 | +0.010 | | 0.000 | 0.000 |
| | +0.001 | −0.001 | 1, −3 | +0.5567 | +0.3385 |
| | −0.003 | −0.012 | | +0.0107 | +0.0146 |
| 0, −1 | −0.003 | +0.026 | | −0.0151 | −0.0088 |
| | +0.002 | −0.008 | 2, −3 | +0.057 | +0.153 |
| | −0.002 | −0.005 | | −0.008 | −0.033 |
| 1, −1 | −0.017 | +0.025 | | +0.965 | +2.107 |
| | −0.007 | +0.005 | 3, −3 | +0.060 | −0.125 |
| | +0.014 | +0.016 | | −0.019 | +0.036 |
| 2, −1 | −0.007 | 0.000 | | −0.070 | +0.197 |
| | +0.001 | +0.001 | 4, −3 | +0.007 | −0.005 |
| | +0.015 | +0.006 | | −0.002 | +0.002 |
| 3, −1 | +0.009 | −0.002 | | −0.009 | +0.005 |
| | −0.002 | 0.000 | 1, −4 | +0.005 | +0.008 |
| | −0.011 | +0.004 | | −0.002 | +0.005 |
| 0, −2 | −0.020 | +0.007 | | −0.001 | 0.000 |
| | −0.033 | 0.000 | 2, −4 | −0.005 | +0.069 |
| | +0.005 | +0.001 | | +0.006 | −0.011 |
| 1, −2 | −0.356 | +0.003 | | −0.003 | +0.074 |
| | +0.032 | +0.007 | 3, −4 | +0.074 | −0.050 |
| | −0.100 | +0.022 | | −0.019 | +0.013 |
| 2, −2 | +0.178 | +0.081 | | −0.144 | +0.119 |
| | −0.041 | −0.045 | 4, −4 | −0.076 | −0.012 |
| | −0.468 | −0.287 | | +0.022 | +0.005 |
| | | | | +0.096 | +0.011 |

Digitized by Google

128.

Die noch für $\Delta n\delta z$ nach (52) erforderlichen Producte sind die folgenden:

| | $\left(\frac{d\overline{W}}{d\eta}\right)\Delta\varepsilon$ | | $2(\overline{W}+\nu)\Delta\nu$ | | $\overline{Wk}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $i,i'$ | cos | sin | cos | sin | cos | sin |
| 0,0 | −0.″05146 | | −0.″05790 | | −0.″09086 | |
| 0,0 | +0.″00024 $\varepsilon$ | | +0.″00024 $\varepsilon$ | | +0.″00009 $\varepsilon$ | |
| 1,0 | −0.925 | +0.″124 | +0.207 | +0.163 | +0.012 | +0.″013 |
| 1,0 | −0.00361 $\varepsilon$ | −0.00112 $\varepsilon$ | 0.00020 $\varepsilon$ | +0.00065 $\varepsilon$ | −0.00001 $\varepsilon$ | +0.00005 $\varepsilon$ |
| 2,0 | +0.434 | +0.017 | − 0.131 | −0.027 | −0.091 | −0.075 |
| 2,0 | +0.00006 $\varepsilon$ | +0.00034 $\varepsilon$ | −0.00006 $\varepsilon$ | −0.00034 $\varepsilon$ | +0.00009 $\varepsilon$ | −0.00029 $\varepsilon$ |
| −1,−1 | +0.014 | −0.010 | +0.001 | +0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 0,−1 | 0.000 | +0.001 | 0.000 | −0.009 | −0.003 | −0.008 |
| 1,−1 | −0.073 | +0.025 | +0.006 | +0.017 | 0.000 | +0.001 |
| 2,−1 | +0.007 | +0.009 | −0.007 | −0.007 | −0.003 | −0.008 |
| 3,−1 | −0.005 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 0,−2 | +0.016 | +0.010 | +0.004 | +0.001 | +0.007 | −0.006 |
| 1,−2 | +0.044 | −0.044 | +0.033 | +0.002 | +0.028 | −0.020 |
| 2,−2 | −0.292 | −0.404 | −0.066 | +0.042 | +0.002 | −0.003 |
| 3,−2 | −0.020 | +0.037 | +0.020 | −0.038 | +0.028 | −0.020 |
| 0,−3 | −0.014 | −0.031 | +0.002 | +0.003 | −0.006 | +0.003 |
| 1,−3 | −0.0806 | −0.0437 | −0.0747 | −0.0426 | −0.0799 | +0.0005 |
| 2,−3 | −0.004 | +0.938 | +0.168 | −0.004 | +0.003 | 0.000 |
| 3,−3 | +0.023 | +0.030 | −0.066 | +0.049 | −0.079 | 0.000 |
| 4,−3 | +0.006 | +0.001 | −0.007 | −0.001 | −0.004 | −0.003 |
| 1,−4 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | −0.002 | 0.000 |
| 2,−4 | −0.003 | +0.013 | +0.005 | −0.004 | −0.001 | −0.003 |
| 3,−4 | −0.051 | +0.019 | 0.000 | +0.011 | −0.002 | +0.001 |
| 4,−4 | +0.028 | +0.012 | −0.002 | −0.008 | −0.001 | −0.003 |

und die für $\Delta\nu$ nach (54) erforderlichen die folgenden:

| | $\left\{\left(\frac{d^2W}{d\eta^2}\right)+2(\overline{W}+\nu)\right\}\Delta\varepsilon$ | | $-2(\overline{W}+\nu)\frac{\Delta\chi}{\cos\varphi}$ | | $\left(\frac{d\overline{W}}{d\eta}\right)\frac{\Delta a}{a}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| $i,i'$ | sin | −cos | sin | −cos | sin | −cos |
| 0,0 | | +0.″00424 | | +0.″03355 | | +0.″00001 |
| 1,0 | +0.″056 | −0.026 | +0.″926 | −1.129 | −0.″217 | −0.179 |
| 1,0 | 0 $\varepsilon$ | 0 $\varepsilon$ | +0.00361 $\varepsilon$ | +0.00112 $\varepsilon$ | +0.00022 $\varepsilon$ | −0.00070 $\varepsilon$ |
| 2,0 | −0.002 | +0.003 | −0.002 | +0.008 | +0.007 | +0.001 |
| −1,−1 | +0.001 | −0.001 | +0.011 | −0.008 | +0.002 | +0.003 |
| 0,−1 | 0.000 | −0.001 | −0.004 | +0.008 | 0.000 | 0.000 |
| 1,−1 | −0.016 | +0.006 | +0.097 | −0.033 | −0.005 | −0.014 |
| 2,−1 | +0.001 | 0.000 | −0.002 | −0.003 | 0.000 | 0.000 |
| 3,−1 | +0.002 | 0.000 | +0.004 | 0.000 | 0.000 | −0.001 |

Digitized by Google

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,−2 | +0".004 | −0".001 | +0".015 | +0".013 | −0".002 | +0".002 |
| 1,−2 | −0.033 | −0.031 | +0.052 | +0.056 | +0.007 | −0.006 |
| 2,−2 | +0.044 | +0.068 | +0.268 | +0.378 | +0.079 | −0.056 |
| 3,−2 | +0.002 | −0.004 | −0.001 | +0.002 | 0.000 | 0.000 |
| 0,−3 | −0.002 | +0.001 | −0.014 | −0.029 | +0.006 | −0.003 |
| 1,−3 | +0.0261 | +0.0224 | −0.0251 | −0.0259 | +0.0012 | −0.0005 |
| 2,−3 | +0.004 | +0.025 | −0.002 | −0.957 | −0.182 | 0.000 |
| 3,−3 | +0.021 | −0.026 | +0.046 | −0.060 | −0.043 | −0.010 |
| 4,−3 | −0.002 | −0.001 | +0.002 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |
| 2,−4 | 0.000 | +0.008 | +0.002 | −0.022 | −0.004 | −0.001 |
| 3,−4 | +0.015 | −0.007 | +0.045 | −0.015 | −0.003 | −0.009 |
| 4,−4 | −0.042 | −0.004 | −0.022 | −0.008 | −0.002 | +0.005 |

Hieraus ergeben sich durch die Ausdrücke (52) und (54) die folgenden Verbesserungen der Störungscoefficienten:

| | $\Delta n\delta z$ | | $\Delta v$ | |
|---|---|---|---|---|
| | sin | cos | cos | sin |
| 0,0 | | $-0".1548\varepsilon$ | $-0".00011\varepsilon$ | |
| 1,0 | −0".70 | −1.30 | +0.38 | −0".67 |
| 1,0 | $+0.00444\varepsilon$ | $-0.00753\varepsilon$ | $-0.00222\varepsilon$ | $-0.00377\varepsilon$ |
| 2,0 | −0.03 | +0.07 | 0.00 | +0.01 |
| 2,0 | $-0.00005\varepsilon$ | $+0.00031\varepsilon$ | | |
| 0,−1 | +0.01 | −0.01 | 0.00 | 0.00 |
| 1,−1 | −0.12 | −0.19 | +0.04 | −0.07 |
| 0,−2 | +0.01 | +0.02 | +0.15 | −0.09 |
| 1,−2 | −1.05 | +0.02 | +0.26 | +0.01 |
| 2,−2 | −0.52 | +0.47 | +0.31 | +0.24 |
| 3,−2 | +0.03 | 0.00 | 0.00 | 0.00 |
| 0,−3 | −0.05 | +0.02 | −0.04 | −0.01 |
| 1,−3 | −5.80 | +2.77 | −0.31 | −0.22 |
| 2,−3 | +1.22 | −3.29 | −0.61 | −1.61 |
| 3,−3 | −0.10 | −0.03 | +0.03 | −0.07 |
| 1,−4 | 0.00 | +0.02 | 0.00 | −0.01 |
| 2,−4 | +0.01 | −0.22 | +0.01 | −0.08 |
| 3,−4 | −0.09 | −0.07 | +0.06 | −0.05 |
| 4,−4 | +0.03 | 0.00 | −0.02 | 0.00 |

129.

Die Säcularänderungen der vorstehenden Ausdrücke habe ich vollständig durch die allgemeinen Ausdrücke mit den anderen Coefficienten zugleich berechnet. Man kann sich leicht davon überzeugen, dass sie den Bedingungen, welche durch die Ausdrücke (60) und (61) ausgedrückt sind, so nahe wie möglich gnügen, indem nur Unterschiede von Einer oder höchstens zwei Einheiten in der letzten Decimale übrig bleiben, wenn man diese Bedingungen auf sie anwendet.

Digitized by Google

Da die Verbesserungen der Coefficienten der übrigen Störungen so klein ausgefallen sind, so habe ich nicht für nöthig erachtet, die Verbesserungen der Breitenstörungen zu berechnen. Blos die Verbesserung der Coefficienten der Säcularänderungen habe ich nach den Ausdrücken des Art. 124 und des Ausdrucks (63) berechnet. Jene Ausdrücke geben

$$V(0.s) = +0''.00102\ ;\quad V(0.c) = +0''.01085$$

und da die erste Annäherung

$$V(0.s) = +1''.3839\ ;\quad V(0.c) = +7''.8569$$

gegeben hat, so folgt aus (63)

$$\frac{\Delta u}{\cos i} = -0''.00133\,\varepsilon - 0''.00893\,\varepsilon \sin\varepsilon + 0''.01201\,\varepsilon\cos\varepsilon$$

Ich bemerke noch, dass man sowohl in diesem Ausdruck für $\Delta u$, so wie in denen des vor. Art. für $\Delta n\delta z$ und $\Delta v$ der Kleinheit der Coefficienten wegen ausserhalb der Sinus- und Cosinuszeichen ohne Weiteres $nt$ für $\varepsilon$ setzen darf.

## 130.

Durch die Ausdrücke des Art. 125 habe ich ferner die von der Verbesserung der Integrationsfactoren herrührende Verbesserung der Störungscoefficienten wie folgt gefunden:

| | $\Delta n\delta z$ | | $\Delta v$ | | $\frac{\Delta u}{\cos i}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | sin | cos | cos | sin | sin | cos |
| 0, −2 | +0".01 | +0".01 | 0".00 | 0".00 | | |
| 1, −2 | −0.23 | −0.24 | +0.03 | −0.02 | | |
| 2, −2 | −0.25 | −0.17 | +0.14 | −0.09 | | |
| 0, −3 | +0.18 | +0.08 | +0.10 | −0.05 | +0".06 | −0".03 |
| 1, −3 | +10.43 | +11.97 | +0.43 | −0.19 | −0.04 | −0.07 |
| 2, −3 | −6.19 | +0.01 | +3.12 | 0.00 | +0.36 | +0.87 |
| 3, −3 | +0.15 | −0.01 | −0.01 | −0.01 | | |
| 2, −4 | +0.01 | 0.00 | +0.01 | 0.00 | | |
| 3, −4 | +0.01 | −0.02 | −0.01 | −0.02 | | |
| 2, −5 | +0.08 | +0.01 | −0.01 | 0.00 | | |
| 3, −5 | 0.00 | −0.05 | 0.00 | −0.02 | | |
| 4, −5 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | 0.00 | | |
| 2, −6 | −0.38 | −0.04 | −0.01 | 0.00 | | |
| 3, −6 | +0.02 | −0.09 | −0.01 | −0.05 | | |

Addirt man diese zu den vorhergehenden, so stehen die ganzen Verbesserungen wie folgt:

Digitized by Google

| | $\Delta n\delta z$ | | $\Delta v$ | | $\frac{\Delta u}{\cos i}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | sin | cos | cos | sin | sin | cos |
| 0,0 | | $-0''.1518nt$ | $-0''.00044nt$ | | | $-0''.00133nt$ |
| 1,0 | $-0''.70$ | $-1.30$ | $+0.38$ | $-0''.67$ | | |
| 1,0 | $+0.00444nt$ | $-0.00753nt$ | $-0.00222nt$ | $-0.00377nt$ | $-0''.00893nt$ | $+0.01204nt$ |
| 2,0 | $-0.03$ | $+0.07$ | 0.00 | $+0.04$ | | |
| 2,0 | $-0.00005nt$ | $+0.00031nt$ | | | | |
| 0,−1 | $+0.04$ | $-0.04$ | 0.00 | 0.00 | | |
| 1,−1 | $-0.12$ | $-0.19$ | $+0.04$ | $-0.07$ | | |
| 0,−2 | $+0.02$ | $+0.03$ | $+0.15$ | $-0.09$ | | |
| 1,−2 | $-1.28$ | $-0.22$ | $+0.29$ | $-0.01$ | | |
| 2,−2 | $-0.77$ | $+0.30$ | $+0.45$ | $+0.15$ | | |
| 3,−2 | $+0.03$ | 0.00 | 0.00 | 0.00 | | |
| 0,−3 | $+0.13$ | $+0.10$ | $+0.06$ | $-0.06$ | $+0.06$ | $-0.03$ |
| 1,−3 | $+4.63$ | $+14.74$ | $+0.12$ | $-0.41$ | $-0.04$ | $-0.07$ |
| 2,−3 | $-4.97$ | $-3.28$ | $+2.51$ | $-1.61$ | $+0.36$ | $+0.87$ |
| 3,−3 | $+0.05$ | $-0.04$ | $+0.02$ | $-0.08$ | | |
| 1,−4 | 0.00 | $+0.02$ | 0.00 | $-0.01$ | | |
| 2,−4 | $+0.02$ | $-0.22$ | $+0.02$ | $-0.08$ | | |
| 3,−4 | $-0.08$ | $-0.09$ | $+0.05$ | $-0.07$ | | |
| 4,−4 | $+0.03$ | 0.00 | $-0.02$ | 0.00 | | |
| 2,−5 | $+0.08$ | $+0.01$ | $-0.01$ | 0.00 | | |
| 3,−5 | 0.00 | $-0.05$ | 0.00 | $-0.02$ | | |
| 2,−6 | $-0.38$ | $-0.04$ | $-0.01$ | 0.00 | | |
| 3,−6 | $+0.02$ | $-0.09$ | $-0.01$ | $-0.05$ | | |

Hiebei ist noch die Verbesserung der willkührlichen Constanten zu berücksichtigen, die, wie schon oben erwähnt, genau so ausgeführt wird, wie die früheren analogen Bestimmungen. Es fand sich diese:

$$k = +0''.77$$
$$k_1 = -5.32$$
$$k_2 = -3.00$$
$$c - c_0 = +3.0$$

und hiemit geht die Abtheilung der vorstehenden Tafel, die von $i = 0$ abhängt, in die folgende über:

| | $\Delta n\delta z$ | | $\Delta v$ | |
|---|---|---|---|---|
| | sin | cos | cos | sin |
| 0,0 | | | $-0''.35$ | |
| 0,0 | | | $-0.00044nt$ | |
| 1,0 | $-6''.00$ | $+1''.70$ | $+3.04$ | $+0''.83$ |
| 1,0 | $+0.00444nt$ | $-0.00753nt$ | $-0.00222nt$ | $-0.00377nt$ |
| 2,0 | $+0.08$ | $+0.12$ | 0.00 | $+0.01$ |
| 2,0 | $-0.00005nt$ | $+0.00031nt$ | | |

Digitized by Google

und es bekommt ausserdem die mittlere Anomalie $g$ den Zuwachs:

$$+3''.0 + 0''.0035t$$

wo wie früher der mittlere Sonnentag die Einheit von $t$ ist.

131.

Es ist schliesslich noch die vom Mars bewirkte Ungleichheit langer Periode wegen der Verbesserung von $n$ zu berichtigen. Hiefür werde ich den betreffenden Divisor neu berechnen. Dem Vorhergehenden zufolge ist der berichtigte Werth der wahren mittleren täglichen Bewegung

$$n = 857''.9364$$

hieraus folgt für den Mars $\frac{n'}{n}$ oder

$$\mu = 2.199062$$

und

$$11 - 5\mu = +0.004690$$

hieraus und aus den übrigen im Art. 24 (II) berechneten numerischen Werthen erhalten wir für diese Ungleichheit

$$\begin{aligned} n\delta z = &+ 11''.90 \sin\{(11-5\mu)\varepsilon - 5(c'-\mu c)\} \\ &+ 26.33 \cos\{(11-5\mu)\varepsilon - 5(c'-\mu c)\} \end{aligned}$$

Es wäre nun noch für die Egeria zu ermitteln, ob von den Ungleichheiten langer Periode, die in ihren Argumenten die Anomalien zweier störenden Planeten enthalten, und deren Berechnung in den Artt. 87 u. f. erklärt worden ist, einige merklich werden.

Ich habe mehrere von diesen untersucht, aber keine merkliche, oder wenigstens nur sehr kleine Coefficienten gefunden, die ich hier übergehen werde.

132.

In aller Strenge müsste man mit den in diesem § gefundenen Verbesserungen der Störungscoefficienten die Berechnung der Unterschiede zwischen dem der Rechnung ursprünglich zu Grunde gelegten System von osculirenden Elementen und den genaueren im vor. § angewandten Systemen wiederholen, allein da die Verbesserungen, die hieraus hervorgehen, voraussichtlich sehr unbedeutend sein werden, so unterlasse ich es, und stelle sogleich das ganze erhaltene Resultat zusammen. Dieses besteht aus der Summe der im Art. 94 und 130 erhaltenen Glieder,



Digitized by Google

und ist, nachdem man in den Säcularänderungen für $n$ den in Theilen des Radius ausgedrückten Betrag der wahren mittleren Bewegung während eines Julianischen Jahres substituirt hat, das folgende:

$$g = 19^{\circ}\ 37'\ 51''.7 + 857''.9364\,(t.365{,}25) - 0''.4321\,t_1^2$$

und

| | $n\delta z$ | | $v$ | | $\frac{u}{\cos i}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | sin | cos | cos | sin | sin | cos |
| 0,0 | | | $-21''.87$<br>$+0''.07895\,t$<br>$+0''.533\,t_1^2$ | | | $+5''.72$<br>$-0''.46496\,t$<br>$+2''.121\,t_1^2$ |
| 1,0 | $+820''.80$<br>$-1''.79225\,t$<br>$-10''.231\,t_1^2$ | $-677''.90$<br>$-4''.66557\,t$<br>$+2''.206\,t_1^2$ | $-409''.85$<br>$+0''.89945\,t$<br>$+5''.144\,t_1^2$ | $-338''.40$<br>$-2''.33220\,t$<br>$+1''.101\,t_1^2$ | $-111''.47$<br>$-11''.99471\,t$<br>$-1''.848\,t_1^2$ | $-22''.08$<br>$+2''.12967\,t$<br>$-10''.679\,t_1^2$ |
| 2,0 | $-19''.55$<br>$+0''.02700\,t$<br>$+0''.016\,t_1^2$ | $+13''.50$<br>$+0''.09110\,t$<br>$+0''.457\,t_1^2$ | $+4''.64$<br>$+0''.00465\,t$<br>$+0''.085\,t_1^2$ | $-0''.41$<br>$-0''.00360\,t$<br>$+0''.062\,t_1^2$ | $-0''.52$<br>$-0''.01979\,t$<br>$+0''.553\,t_1^2$ | $-0''.21$<br>$+0''.02453\,t$<br>$+1''.080\,t_1^2$ |
| 3,0 | $+0''.10$<br>$+0''.00023\,t$<br>$+0''.005\,t_1^2$ | $-0''.08$<br>$+0''.00020\,t$<br>$-0''.002\,t_1^2$ | $-0''.05$<br>$+0''.00017\,t$<br>$+0''.005\,t_1^2$ | $-0''.09$<br>$-0''.00011\,t$<br>$+0''.002\,t_1^2$ | $-0''.02$<br>$-0''.00032\,t$<br>$+0''.012\,t_1^2$ | $-0''.04$<br>$+0''.00044\,t$<br>$+0''.023\,t_1^2$ |
| −2,−1 | $+0''.30$ | $-0''.18$ | $+0''.21$ | $+0''.04$ | $+0''.08$ | $+0''.04$ |
| −1,−1 | $-3''.31$<br>$+0''.00252\,t$ | $+5''.93$<br>$+0''.00226\,t$ | $-2''.00$<br>$+0''.00166\,t$ | $-3''.72$<br>$-0''.00146\,t$ | $+2''.12$ | $+3''.03$ |
| 0,−1 | $+20''.45$<br>$+0''.00371\,t$ | $-12''.36$<br>$+0''.00257\,t$ | $+2''.44$<br>$+0''.00149\,t$ | $-1''.01$<br>$-0''.00085\,t$ | $+10''.47$ | $+5''.98$ |
| 1,−1 | $+39''.90$<br>$-0''.00184\,t$ | $-116''.02$<br>$-0''.00112\,t$ | $-13''.96$<br>$+0''.00075\,t$ | $-10''.64$<br>$-0''.00055\,t$ | $-7''.98$ | $-5''.06$ |
| 2,−1 | $+0''.20$<br>$-0''.00216\,t$ | $+2''.09$<br>$-0''.00043\,t$ | $-0''.62$<br>$+0''.00114\,t$ | $+0''.04$<br>$-0''.00027\,t$ | $-5''.08$ | $-0''.71$ |
| 3,−1 | $-0''.03$ | $-0''.76$ | $0''.00$ | $-0''.65$ | $+0''.15$ | $-0''.01$ |
| 4,−1 | $+0''.01$ | $+0''.04$ | $-0''.01$ | $+0''.02$ | $+0''.02$ | $0''.00$ |
| −2,−2 | $+0''.02$ | $-0''.01$ | $+0''.02$ | $-0''.01$ | $+0''.03$ | $0''.00$ |
| −1,−2 | $-0''.25$ | $+0''.49$ | $+0''.02$ | $-0''.58$ | $-0''.05$ | $+0''.16$ |
| 0,−2 | $+14''.11$<br>$+0''.00843\,t$ | $+12''.67$<br>$-0''.00519\,t$ | $+5''.90$<br>$+0''.00331\,t$ | $-6''.15$<br>$+0''.00202\,t$ | $+8''.94$ | $-4''.48$ |
| 1,−2 | $-177''.61$<br>$+0''.02554\,t$ | $-167''.37$<br>$-0''.01799\,t$ | $+44''.61$<br>$-0''.00339\,t$ | $-38''.92$<br>$-0''.00249\,t$ | $-12''.85$ | $+14''.59$ |
| 2,−2 | $-190''.08$<br>$-0''.00449\,t$ | $-132''.82$<br>$+0''.00630\,t$ | $+113''.42$<br>$+0''.00222\,t$ | $-79''.54$<br>$+0''.00325\,t$ | $-5''.13$ | $+3''.89$ |
| 3,−2 | $+3''.26$<br>$-0''.00075\,t$ | $+3''.45$<br>$+0''.00272\,t$ | $+0''.77$<br>$+0''.00032\,t$ | $+0''.14$<br>$+0''.00122\,t$ | $+0''.52$ | $-0''.90$ |
| 4,−2 | $+0''.30$ | $+0''.08$ | $-0''.23$ | $+0''.08$ | $-0''.04$ | $+0''.03$ |
| −1,−3 | $+0''.41$ | $+0''.25$ | $-0''.01$ | $-0''.05$ | $-0''.02$ | $+0''.06$ |
| 0,−3 | $-18''.74$<br>$+0''.00439\,t$ | $-10''.28$<br>$+0''.00067\,t$ | $-10''.99$<br>$+0''.00179\,t$ | $+5''.81$<br>$-0''.00094\,t$ | $-6''.49$<br>$+0''.00702\,t$ | $+4''.06$<br>$+0''.02212\,t$ |
| 1,−3 | $-622''.59$<br>$-0''.02913\,t$ | $-638''.26$<br>$-0''.57196\,t$ | $-48''.41$<br>$-0''.00272\,t$ | $+19''.74$<br>$+0''.01672\,t$ | $+2''.70$<br>$-0''.01665\,t$ | $+12''.42$<br>$-0''.00287\,t$ |

Digitized by Google

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 2,−3 | +744".30 | −2".61 | −358".11 | −1".75 | −38".66 | −94".14 |
| | +0.01768$t$ | +0.06260$t$ | −0.00860$t$ | +0.03086$t$ | −0.00149$t$ | +0.02569$t$ |
| 3,−3 | +3.92 | −14.83 | −13.36 | −10.37 | −0.69 | −1.04 |
| | −0.00349$t$ | −0.01033$t$ | +0.00143$t$ | −0.00369$t$ | −0.02019$t$ | −0.00438$t$ |
| 4,−3 | −0.42 | +0.04 | −0.11 | −0.30 | +0.20 | +0.21 |
| | −0.00020$t$ | +0.00003$t$ | +0.00017$t$ | −0.00047$t$ | −0.00090$t$ | +0.00060$t$ |
| 5,−3 | −0.07 | +0.10 | +0.06 | +0.09 | | |
| 0,−4 | −0.23 | −0.15 | −0.20 | +0.07 | −0.20 | −0.04 |
| 1,−4 | −2.49 | +0.72 | −1.47 | −0.07 | +0.36 | +1.47 |
| 2,−4 | +31.18 | −4.27 | −11.14 | −2.86 | −4.10 | −2.94 |
| 3,−4 | +5.35 | −17.43 | −3.98 | −11.14 | −3.20 | +0.17 |
| 4,−4 | +1.43 | +4.77 | −1.29 | +3.47 | +0.25 | +0.05 |
| 5,−4 | +0.10 | −0.02 | −0.11 | +0.10 | −0.09 | +0.05 |
| 6,−4 | −0.03 | −0.04 | +0.03 | −0.04 | | |
| 0,−5 | −0.04 | −0.03 | −0.02 | +0.01 | −0.03 | 0.00 |
| 1,−5 | −0.43 | +0.60 | −0.29 | −0.19 | −0.05 | +0.43 |
| 2,−5 | +18.22 | +3.51 | −2.94 | −0.21 | −0.46 | −0.48 |
| 3,−5 | +0.19 | −13.04 | −0.57 | −7.24 | −3.07 | +2.37 |
| 4,−5 | +2.35 | +2.07 | −1.84 | +1.48 | +0.19 | −0.63 |
| 5,−5 | −1.29 | +0.01 | +1.06 | +0.05 | −0.05 | +0.07 |
| 6,−5 | −0.04 | +0.04 | +0.07 | +0.04 | −0.01 | −0.03 |
| 1,−6 | +0.26 | −0.14 | +0.18 | +0.11 | +0.07 | −0.29 |
| 2,−6 | +19.52 | +1.47 | +1.40 | +0.35 | −0.31 | +0.18 |
| 3,−6 | −4.18 | +12.46 | +1.88 | +5.75 | +1.82 | −2.48 |
| 4,−6 | +2.32 | +0.19 | −1.25 | +0.37 | −0.25 | −0.67 |
| 5,−6 | −0.85 | +0.55 | +0.64 | +0.43 | +0.15 | +0.11 |
| 6,−6 | +0.11 | −0.38 | −0.08 | −0.32 | −0.02 | −0.03 |
| 7,−6 | −0.01 | −0.02 | 0.00 | −0.03 | +0.01 | 0.00 |
| 2,−7 | +0.08 | −0.07 | +0.04 | +0.05 | −0.06 | −0.02 |
| 3,−7 | −0.57 | +1.77 | +0.12 | +0.58 | +0.14 | −0.14 |
| 4,−7 | +0.79 | +0.22 | −0.48 | +0.21 | −0.20 | −0.24 |
| 5,−7 | −0.27 | +0.39 | +0.21 | +0.27 | +0.16 | 0.00 |
| 6,−7 | −0.10 | −0.34 | +0.08 | −0.28 | −0.05 | +0.03 |
| 7,−7 | +0.11 | −0.07 | −0.10 | +0.05 | +0.01 | 0.00 |
| 2,−8 | 0.00 | −0.04 | 0.00 | +0.02 | | |
| 3,−8 | −0.58 | +1.45 | +0.03 | +0.21 | +0.05 | −0.04 |
| 4,−8 | +0.79 | +0.35 | −0.44 | +0.22 | −0.16 | −0.18 |
| 5,−8 | −0.10 | +0.16 | +0.08 | +0.11 | +0.07 | −0.03 |
| 6,−8 | −0.11 | −0.13 | +0.08 | −0.11 | −0.02 | +0.05 |
| 7,−8 | +0.13 | 0.00 | −0.11 | 0.00 | 0.00 | −0.02 |
| 8,−8 | −0.03 | +0.03 | +0.03 | +0.03 | | |
| 3,−9 | −0.45 | +0.57 | −0.02 | −0.06 | | |
| 4,−9 | −0.61 | −0.33 | +0.27 | −0.15 | | |
| 5,−9 | −0.04 | +0.06 | +0.04 | +0.04 | | |
| 6,−9 | −0.04 | −0.01 | +0.03 | −0.02 | | |
| 7,−9 | +0.06 | −0.03 | −0.05 | −0.02 | | |
| 8,−9 | −0.02 | +0.05 | +0.01 | +0.04 | | |
| 4,−10 | −0.11 | −0.08 | +0.03 | −0.02 | | |
| 5,−10 | −0.03 | +0.05 | +0.03 | +0.03 | | |
| 6,−10 | −0.02 | −0.02 | +0.01 | −0.02 | | |
| 7,−10 | +0.02 | −0.02 | −0.02 | −0.01 | | |
| 8,−10 | 0.00 | +0.03 | 0.00 | +0.02 | | |



Digitized by Google

Es bedeutet hier $t$ das Julianische Jahr und

$$t_1 = \frac{t}{100}$$

Zu den vorstehenden Gliedern kommt noch die im Art. 131 berechnete vom Mars bewirkte Ungleichheit langer Periode, sowie die im Art. 59 (II) gegebenen vom Saturn und Mars verursachten Ungleichheiten, mit Weglassung jedoch der von $i' = 0$ abhängigen Glieder, da diese schon den vorstehenden einverleibt sind.

Es ist ferner noch zufolge des Art. 94 hinzuzufügen:

1) wenn man die Ekliptik zur Fundamentalebene wählt,

$$\Gamma = +0''.00382\, t$$
$$\delta_2 u = \quad 0''.000\, t_1^2 - 0''.071\, t_1^2 \sin\varepsilon + 0''.012\, t_1^2 \cos\varepsilon$$

2) wenn man den Aequator zur Fundamentalebene wählt,

$$\Gamma = +0''.00459\, t$$
$$\delta_2 u = +0''.012\, t_1^2 + 0''.824\, t_1^2 \sin\varepsilon - 0''.115\, t_1^2 \cos\varepsilon$$

wo $t$ und $t_1$ dieselbe Bedeutung haben wie oben.

## §. 10. Verwandelung der von osculirenden Elementen abhängigen Störungen in solche, welche von den mittleren Elementen abhängen. Bestimmung der mittleren Elemente.

### 133.

Mit den im vor. § erhaltenen Störungen kann die Berechnung derselben als beendigt angesehen werden, da sie den Bedingungen der Aufgabe vollständig gnügen, und es könnten dieselben ohne Weiteres in Tafeln gebracht werden. Allein es hat nicht nur Interesse, sondern es ist auch nützlich die Störungen kennen zu lernen, die den mittleren Elementen entsprechen, und ich werde daher zeigen, wie diese aus jenen erhalten werden können. Die den mittleren Elementen entsprechenden Störungen sind in ihrem Gesammtbetrage jedenfalls die kleinsten, folglich immer kleiner wie jene, und daher die Anwendung derselben die vortheilhafteste. In unserem Beispiel ist der Unterschied nicht unbeträchtlich, da in dem Ausdruck für $n\delta z$ die Coefficienten

Digitized by Google

+820″80 und −677″90 und in dem von $u$ die Coefficienten −111″47 und −22″08 des Arguments 1,0 gänzlich wegfallen, und im Ausdruck für $\nu$ statt der Coefficienten −409″85 und −338″40 desselben Arguments sehr kleine Coefficienten eintreten, während alle übrigen Störungscoefficienten sich nur sehr wenig ändern.

## 134.

Nennen wir wie vorher die Elemente, auf welche sich die als gegeben angesehenen Störungen $n\delta z$, $\nu$ und $\frac{u}{\cos i}$ beziehen, $c_0$, $a_0$, $\varphi_0$, $\pi_0$, $i_0$, $\theta_0$ und beziehen die Elemente, welchen die gesuchten Störungen $n\delta(z)$, $(\nu)$ und $\frac{(u)}{\cos i}$ angehören sollen, mit $(c)$, $(a)$, $(\varphi)$, $(\chi)$, $(i)$, $(\sigma)$. Es ist nun für die allgemeine Auflösung unserer Aufgabe gleichgültig, ob diese letztgenannten Elemente mittlere sind oder nicht, nur muss jedenfalls vorausgesetzt werden, dass die einzelnen Elemente dieser beiden Systeme nur um Grössen von der Ordnung der störenden Kräfte von einander verschieden sind. Aus dem Umstande, dass $v$ und $r$ ideale Coordinaten sind, folgt schon, dass aus jedem der beiden genannten Elementensysteme und den denselben entsprechenden Störungen stets dieselben Werthe von $v$ und $r$ hervorgehen müssen, und wir haben daher fürerst den beiden folgenden Systemen von Gleichungen Gnüge zu leisten,

$$\begin{array}{rcl}
nt + c_0 + n\delta z = \bar{\varepsilon} - e_0 \sin \bar{\varepsilon} & ; & nt + (c) + n\delta(z) = (\varepsilon) - (e)\sin(\varepsilon) \\
\bar{r}\cos\bar{f} = a_0 \cos\bar{\varepsilon} - a_0 e_0 & ; & (r)\cos(f) = (a)\cos(\varepsilon) - (a)(e) \\
\bar{r}\sin\bar{f} = a_0 \cos\varphi_0 \sin\bar{\varepsilon} & ; & (r)\sin(f) = (a)\cos(\varphi)\sin(\varepsilon) \\
v = \bar{f} + \pi_0 & ; & v = (f) + (\chi) \\
r = \bar{r}(1+\nu) & ; & r = (r)(1+(\nu)) \\
a_0^{\,3} n_0^{\,2} = k^2(1+m) & ; & (a)^3 n^2 = k^2(1+m)
\end{array}$$

in welchen dem Vorhergehenden zufolge jedenfalls $n$ der wahre Werth der mittleren Bewegung ist.

## 135.

Da wir in der Ermittelung von $n\delta(z)$, $(\nu)$, etc. die Cuben und höheren Potenzen der störenden Kräfte übergehen werden, so können wir die vorgegebene Aufgabe leicht durch Hülfe des auf mehrere Veränderliche ausgedehnten Taylorschen Theorems lösen. Sei zu diesem Zwecke

Digitized by Google

$$\begin{aligned} \Delta n\delta z &= n\delta(z) - n\delta z \\ \Delta c &= (c) - c_0 \\ \Delta\varphi &= (\varphi) - \varphi_0 \\ \Delta\chi &= (\chi) - \pi_0 \end{aligned}$$

dann wird, da erstlich bei der Anwendung des einen oder des andern der obigen beiden Systeme von Ausdrücken $v$ stets denselben Werth erhalten muss,

$$\begin{aligned} 0 = \Delta v = {} & \left(\frac{d\bar{f}}{dg}\right)(\Delta n\delta z + \Delta c) + \left(\frac{d\bar{f}}{d\varphi}\right)\Delta\varphi + \Delta\chi \\ & + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\bar{f}}{dg^2}\right)(\Delta n\delta z + \Delta c)^2 + \left(\frac{d^2\bar{f}}{dg\,d\varphi}\right)(\Delta n\delta z + \Delta c)\Delta\varphi + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\bar{f}}{d\varphi^2}\right)\Delta\varphi^2 \end{aligned}$$

wo $g = nt + c_0$ ist. Aus dieser Gleichung bekommt man mit bloser Rücksicht auf die Glieder erster Ordnung

$$\Delta n\delta z + \Delta c = -\frac{\left(\frac{d\bar{f}}{d\varphi}\right)}{\left(\frac{df}{dg}\right)}\Delta\varphi - \frac{1}{\left(\frac{df}{dg}\right)}\Delta\chi$$

woraus

$$(\Delta n\delta z + \Delta c)^2 = \frac{\left(\frac{d\bar{f}}{d\varphi}\right)^2}{\left(\frac{df}{dg}\right)^2}\Delta\varphi^2 + 2\frac{\left(\frac{d\bar{f}}{d\varphi}\right)}{\left(\frac{df}{dg}\right)^2}\Delta\varphi\Delta\chi + \frac{1}{\left(\frac{df}{dg}\right)^2}\Delta\chi^2$$

folgt. Durch die Substitution dieses Ausdrucks in die vorstehende Gleichung zieht man aus derselben

$$\begin{aligned} \Delta n\delta z = {} & -\Delta c - \frac{\left(\frac{df}{d\varphi}\right)}{\left(\frac{df}{dg}\right)}\Delta\varphi - \frac{1}{\left(\frac{df}{dg}\right)}\Delta\chi \\ & - \left\{\frac{\left(\frac{d^2f}{d\varphi^2}\right)}{2\left(\frac{df}{dg}\right)} - \frac{\left(\frac{d^2f}{dg\,d\varphi}\right)\left(\frac{df}{d\varphi}\right)}{\left(\frac{df}{dg}\right)^2} + \frac{\left(\frac{d^2f}{dg^2}\right)\left(\frac{df}{d\varphi}\right)^2}{2\left(\frac{df}{dg}\right)^3}\right\}\Delta\varphi^2 \\ & + \left\{\frac{\left(\frac{d^2f}{dg\,d\varphi}\right)}{\left(\frac{df}{dg}\right)^2} - \frac{\left(\frac{d^2f}{dg^2}\right)\left(\frac{df}{d\varphi}\right)}{\left(\frac{df}{dg}\right)^3}\right\}\Delta\varphi\,\Delta\chi - \frac{\left(\frac{d^2f}{dg^2}\right)}{2\left(\frac{df}{dg}\right)^2}\Delta\chi^2 \end{aligned}$$

wo ich der Kürze wegen $f$ statt $\bar{f}$ geschrieben habe. Die Coefficienten dieser Gleichung können für den Zweck ihrer Entwickelung auf einfachere Ausdrücke hingeführt werden; setzt man

$$H = \frac{\left(\frac{df}{d\varphi}\right)}{\left(\frac{df}{dg}\right)}, \quad K = \frac{1}{\left(\frac{df}{dg}\right)}$$

Digitized by Google

dann ergiebt sich ohne Mühe, dass

$$\begin{aligned}\Delta n\delta z = &-\Delta c - H\Delta\varphi - K\Delta\chi\\ &+\tfrac{1}{2}\left\{H\left(\frac{dH}{dg}\right)-\left(\frac{dH}{d\varphi}\right)\right\}\Delta\varphi^2+\left\{H\left(\frac{dK}{dg}\right)-\left(\frac{dK}{d\varphi}\right)\right\}\Delta\varphi\,\Delta\chi\\ &+\tfrac{1}{2}K\left(\frac{dK}{dg}\right)\Delta\chi^2\end{aligned}$$

wird.

## 136.

Wenn wir fortwährend zur Abkürzung $f$ statt $\bar{f}$, $r$ statt $\bar{r}$, $a$, $\varphi$, etc. statt $a_0$, $\varphi_0$, etc. schreiben, so ist

$$\left(\frac{df}{dg}\right)=\frac{a^2\cos\varphi}{r^2};\quad\left(\frac{df}{d\varphi}\right)=\frac{\sin f}{\cos\varphi}(2+e\cos f)$$

und hieraus folgt

$$H=\frac{r^2\sin f}{a^2\cos^2\varphi}(2+e\cos f);\quad K=\frac{r^2}{a^2\cos\varphi}$$

woraus durch Zuziehung der Gleichungen

$$\left(\frac{dr}{dg}\right)=\frac{ae\sin f}{\cos\varphi};\quad\left(\frac{dr}{d\varphi}\right)=-a\cos\varphi\cos f$$

die folgenden Ausdrücke erhalten werden:

$$\begin{aligned}\left(\frac{dH}{dg}\right)&=\frac{r}{a\cos^2\varphi}\{3e+(2+e^2)\cos f\}\\ \left(\frac{dH}{d\varphi}\right)&=\frac{r^2\sin f}{a^2\cos^3\varphi}(2e+\cos f)\\ \left(\frac{dK}{dg}\right)&=\frac{2re\sin f}{a\cos^3\varphi}\\ \left(\frac{dK}{d\varphi}\right)&=\frac{r^2e}{a^2\cos^3\varphi}-2\frac{r}{a}\cos f\end{aligned}$$

Alle diese Ausdrücke können auf endliche Functionen der excentrischen Anomalie hingeführt werden, und man findet durch die betreffenden Substitutionen leicht

$$\begin{aligned}H &= \frac{2-e^2}{\cos\varphi}\sin\varepsilon-\frac{e}{2\cos\varphi}\sin 2\varepsilon\\ K &= \frac{2+e^2}{2\cos\varphi}-\frac{2e}{\cos\varphi}\cos\varepsilon+\frac{e^2}{2\cos\varphi}\cos 2\varepsilon\\ \left(\frac{dH}{dg}\right) &= \frac{e}{\cos\varphi}+\frac{2}{\cos\varphi}\cos\varepsilon\\ \left(\frac{dH}{d\varphi}\right) &= \frac{e}{\cos^2\varphi}\sin\varepsilon+\frac{4-2e^2}{2\cos^2\varphi}\sin 2\varepsilon\\ \left(\frac{dK}{dg}\right) &= \frac{2e}{\cos\varphi}\sin\varepsilon\\ \left(\frac{dK}{d\varphi}\right) &= 3\frac{2e-e^3}{2\cos^2\varphi}-\frac{2}{\cos^2\varphi}\cos\varepsilon+\frac{e^2}{2\cos^2\varphi}\cos 2\varepsilon\end{aligned}$$

Digitized by Google

vermittelst welcher der Ausdruck für $\Delta n \delta z$ des vor. Art. in den folgenden übergeht:

$$
\begin{aligned}
\Delta n \delta z = & -\Delta c \\
& - \left\{ \frac{2-e^2}{\cos\varphi} \sin\varepsilon - \frac{e}{2\cos\varphi} \sin 2\varepsilon \right\} \Delta\varphi \\
& - \left\{ \frac{2+e^2}{2\cos\varphi} - \frac{2e}{\cos\varphi} \cos\varepsilon + \frac{e^2}{2\cos\varphi} \cos 2\varepsilon \right\} \Delta\chi \\
& + \left\{ \frac{e-2e^3}{4\cos^2\varphi} \sin\varepsilon + \frac{3-e^2}{4\cos^2\varphi} \sin 2\varepsilon - \frac{e}{4\cos^2\varphi} \sin 3\varepsilon \right\} \Delta\varphi^2 \\
& - \left\{ \frac{2e-e^3}{2\cos^2\varphi} - \frac{4-e^2}{2\cos^2\varphi} \cos\varepsilon + \frac{4e-e^3}{2\cos^2\varphi} \cos 2\varepsilon - \frac{e^2}{2\cos^2\varphi} \cos 3\varepsilon \right\} \Delta\varphi \Delta\chi \\
& + \left\{ \frac{4e+e^3}{4\cos^2\varphi} \sin\varepsilon - \frac{e^2}{\cos^2\varphi} \sin 2\varepsilon + \frac{e^3}{4\cos^2\varphi} \sin 3\varepsilon \right\} \Delta\chi^2
\end{aligned} \tag{64}
$$

in welchem allenthalben $\bar{\varepsilon}$ statt $\varepsilon$, $e_0$ und $\varphi_0$ statt $e$ und $\varphi$ gedacht werden muss.

## 137.

Setzt man ferner

$$
\begin{aligned}
\Delta r &= (r) - \bar{r} \\
\Delta v &= (v) - v \\
\Delta a &= (a) - a_0 \\
\Delta n &= n - n_0
\end{aligned}
$$

dann giebt die Bedingung, dass auch $r$ durch die Veränderung der Elemente seinen Werth nicht ändern darf,

$$(r)\ (1+(v)) = \bar{r}\,(1+v)$$

woraus

$$\Delta v = -\frac{(1+v)\,\Delta r}{r+\Delta r}$$

folgt. Aber bis auf Grössen dritter Ordnung ist

$$\frac{\Delta r}{\bar{r}} = \Delta \log \bar{r} + \tfrac{1}{2} (\Delta \log \bar{r})^2$$

und hiemit wird

$$\frac{\Delta v}{1+v} = -\Delta \log \bar{r} + \tfrac{1}{2} (\Delta \log \bar{r})^2$$

Da nun wegen $a_0^3\, n_0^2 = k^2 (1+m)$

$$\log \bar{r} = \log k^2 (1+m) - \tfrac{2}{3} \log n_0 + 2 \log\cos\varphi_0 - \log(1 + e_0 \cos \bar{f})$$

wird, so stellt sich $\log \bar{r}$ als Function von $n_0$, $\varphi_0$ oder $e_0$, und $\bar{f}$ dar. Aber vermöge der hier stattfindenden Gleichung $\Delta v = 0$ wird

$$\Delta \bar{f} = -\Delta\chi$$

da $v = \bar{f} + \pi_0$ ist, und es wird daher

Digitized by Google

$$\Delta \log \bar{r} = -\tfrac{3}{2}\frac{\Delta n}{n_0} + \left(\frac{d\log \bar{r}}{d\varphi_0}\right)\Delta\varphi - \left(\frac{d\log \bar{r}}{df}\right)\Delta\chi + \tfrac{1}{2}\left(\frac{\Delta n}{n_0}\right)^2 + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\log \bar{r}}{d\varphi_0^2}\right)\Delta\varphi^2 - \left(\frac{d^2\log \bar{r}}{d\varphi_0\, df}\right)\Delta\varphi\Delta\chi + \tfrac{1}{2}\left(\frac{d^2\log \bar{r}}{df^2}\right)\Delta^2\chi^2$$

und hiemit

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\nu}{1+\nu} = {} & \tfrac{3}{2}\frac{\Delta n}{n} - \left(\frac{d\log r}{d\varphi}\right)\Delta\varphi + \left(\frac{d\log r}{df}\right)\Delta\chi \\ & -\tfrac{1}{2}\left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2 - \tfrac{3}{2}\left(\frac{d\log r}{d\varphi}\right)\frac{\Delta n}{n}\Delta\varphi + \tfrac{3}{2}\left(\frac{d\log r}{df}\right)\frac{\Delta n}{n}\Delta\chi \\ & -\tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{d^2\log r}{d\varphi^2}\right) - \left(\frac{d\log r}{d\varphi}\right)^2\right\}\Delta\varphi^2 + \left\{\left(\frac{d^2\log r}{d\varphi\, df}\right) - \left(\frac{d\log r}{d\varphi}\right)\left(\frac{d\log r}{df}\right)\right\}\Delta\varphi\Delta\chi \\ & -\tfrac{1}{2}\left\{\left(\frac{d^2\log r}{df^2}\right) - \left(\frac{d\log r}{df}\right)^2\right\}\Delta\chi^2\end{aligned}$$

wo ich wieder zur Abkürzung $r$, $f$, $\varphi$, etc. statt $\bar{r}$, $\bar{f}$, $\varphi_0$, etc. geschrieben habe.

Die Differentiation des obigen Ausdrucks für $\log \bar{r}$ giebt

$$\begin{aligned}\left(\frac{d\log r}{d\varphi}\right) &= -\frac{2e}{\cos\varphi} - \frac{r\cos f}{a\cos\varphi} \\ \left(\frac{d\log r}{df}\right) &= \frac{er\sin f}{a\cos^2\varphi} \\ \left(\frac{d^2\log r}{d\varphi^2}\right) &= -\frac{2}{\cos^2\varphi} + \frac{er\cos f}{a\cos^2\varphi} + \frac{r^2\cos^2 f}{a^2\cos^2\varphi} \\ \left(\frac{d^2\log r}{d\varphi\, df}\right) &= \frac{r\sin f}{a\cos\varphi} - \frac{er^2\sin f\cos f}{a^2\cos^2\varphi} \\ \left(\frac{d^2\log r}{df^2}\right) &= \frac{er\cos f}{a\cos^2\varphi} + \frac{e^2r^2\sin^2 f}{a^2\cos^2\varphi}\end{aligned}$$

Substituirt man diese Ausdrücke und führt wieder die excentrische Anomalie ein, so erhält man

$$\begin{aligned}\frac{\Delta\nu}{1+\nu} = {} & \tfrac{3}{2}\frac{\Delta n}{n} + \left\{\frac{e}{\cos\varphi} + \frac{1}{\cos\varphi}\cos\varepsilon\right\}\Delta\varphi + \frac{e}{\cos\varphi}\sin\varepsilon\,.\,\Delta\chi \\ & -\tfrac{3}{2}\left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2 + \left\{\frac{2e}{3\cos\varphi} + \frac{2}{3\cos\varphi}\cos\varepsilon\right\}\frac{\Delta n}{n}\Delta\varphi + \frac{2e}{3\cos\varphi}\sin\varepsilon\,.\,\frac{\Delta n}{n}\Delta\chi \\ & + \left\{\frac{2+e^2}{2\cos^2\varphi} + \frac{3e}{2\cos^2\varphi}\cos\varepsilon\right\}\Delta\varphi^2 + \frac{1+e^2}{\cos^2\varphi}\sin\varepsilon\,.\,\Delta\varphi\Delta\chi \\ & + \left\{\frac{e^2}{2\cos^2\varphi} - \frac{e}{2\cos^2\varphi}\cos\varepsilon\right\}\Delta\chi^2 \qquad (65)\end{aligned}$$

wo wieder $\bar{\varepsilon}$, $e_0$, $\varphi_0$, statt $\varepsilon$, $e$, $\varphi$ gedacht werden muss.

## 138.

Für die Verwandelung der Breitenstörungen ist an sich klar, dass sie auch so ausgeführt werden muss, dass die Breite des Planeten über der Fundamentalebene oder die auf dieser Ebene senkrechte Coordinate

Digitized by Google

desselben nicht dadurch geändert werde. Nun hat mit Zuziehung der gegebenen Elemente diese Coordinate den folgenden Ausdruck

$$r\sin b = r\sin i_0 \sin(v-\theta_0) + a_0(1+\nu)u$$

und mit Zuziehung der gesuchten Elemente ist

$$r\sin b = r\sin(i)\sin\big(v-(\sigma)\big) + (a)\,(1+(\nu))\,(u)$$

und es müssen also die rechten Seiten dieser beiden Gleichungen gleichwie die linken einander stets gleich sein. Setzt man nun

$$\Delta u = \frac{(a)\,(1+(\nu))}{a_0\,(1+\nu)}\,(u) - u$$

so geben die vorstehenden Gleichungen

$$\Delta u = \frac{\overline{r}}{a_0}\sin i_0 \sin(v-\theta_0) - \frac{\overline{r}}{a_0}\sin(i)\sin\big(v-(\sigma)\big)$$

oder wenn man die Anomalie $\overline{f}$ durch die Gleichung $v = \overline{f} + \pi_0$ einführt,

$$\Delta u = \frac{\overline{r}}{a_0}\sin i_0 \sin(\overline{f}+\pi_0-\theta_0) - \frac{\overline{r}}{a_0}\sin(i)\cos\big((\sigma)-\theta_0\big)\sin(\overline{f}+\pi_0-\theta_0)$$
$$+\frac{\overline{r}}{a_0}\sin(i)\sin\big((\sigma)-\theta_0\big)\cos(\overline{f}+\pi_0-\theta_0)$$

Führt man die excentrische Anomalie in diesen Ausdruck ein, und setzt

$$\sin(i)\sin\big((\sigma)-\theta_0\big) = \beta\cos i_0$$
$$\sin(i)\cos\big((\sigma)-\theta_0\big) = \gamma\cos i_0 + \sin i_0$$

so geht sie in die folgende über

$$\begin{aligned}(66)\qquad \Delta u = &-e_0\{\beta\cos(\pi_0-\theta_0) - \gamma\sin(\pi_0-\theta_0)\}\cos i_0\\ &+\{\beta\cos(\pi_0-\theta_0) - \gamma\sin(\pi_0-\theta_0)\}\cos i_0\cos\overline{\varepsilon}\\ &-\{\beta\sin(\pi_0-\theta_0) + \gamma\cos(\pi_0-\theta_0)\}\cos i_0\sin\overline{\varepsilon}\end{aligned}$$

welche $\beta$ und $\gamma$ giebt, wenn $\Delta u$ gegeben ist. Aus $\beta$ und $\gamma$ erhält man durch die vorhergehenden Gleichungen, oder durch deren Entwickelung $(i)$ und $(\sigma)$. Da diese Gleichungen denen im Art. 105 angewandten analog sind, so können wir ihre Entwickelung sogleich hinschreiben. Es wird dem angezogenen Art. zufolge

$$(i) = i_0 + \gamma + \beta^2\frac{\cos i_0}{2\sin i_0} + \gamma^2\frac{\sin i_0}{2\cos i_0}$$
$$(\sigma) = \theta_0 + \beta\frac{\cos i_0}{\sin i_0} - \beta\gamma\frac{\cos^2 i_0}{\sin i_0}$$

welchen ich sogleich die Ausdrücke für die Länge des Perihels $(\pi)$ und die des Knotens $(\theta)$ hinzufüge, die schliesslich angewandt werden müssen. Derselbe Art. giebt

$$(\theta) = \theta_0 + \frac{\beta}{\sin i_0} - \beta\gamma\frac{2-3\sin^2 i_0}{2\sin^2 i_0\cos i_0} + \Delta\Gamma$$
$$(\pi) = (\chi) + \beta\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}i_0 + \beta\gamma\frac{(1+2\cos i_0)\operatorname{tg}^2\frac{1}{2}i_0}{2\cos i_0} + \Delta\Gamma$$

Digitized by Google

wo $\Delta\Gamma$ noch zu bestimmen ist. In der Anwendung wird man gewöhnlich mit den folgenden Ausdrücken ausreichen,

$$(\theta) = (\sigma) + 2\sin^2\tfrac{1}{2}i_0((\sigma) - \theta_0)$$
$$(\pi) = (\chi) + 2\sin^2\tfrac{1}{2}i_0((\sigma) - \theta_0)$$

die aus den vorhergehenden hervorgehen, wenn man darin die Glieder zweiter Ordnung übergeht.

139.

Die vorliegende Aufgabe verlangt eigentlich ursprünglich, dass sowohl die Länge $l$ wie die Breite $b$ des Planeten auf der Fundamentalebene, und der Radius Vector $r$ durch die Einführung des neuen Elementensystems unveränderte Werthe behalten, und im Vorhergehenden haben wir auch sowohl die Variation von $r$ wie die von $r\sin b$ gleich Null gemacht, woraus folgt, dass auch die Variation von $b$ gleich Null gemacht worden ist. Statt der Variation von $l$ haben wir aber die von $v$ gleich Null gemacht, und es ist daher noch übrig, auch die von $l$ gleich Null zu machen, diese Bedingung wird die im vor. Art. eingeführte Grösse $\Delta\Gamma$ bestimmen, die nur von der zweiten Ordnung sein kann. Die Gleichungen, die wir dazu anwenden wollen, sind die (21) (I), und es ist an sich klar, dass wir die dritte derselben hiefür nicht brauchen, indem die im Vorhergehenden schon für $b$ oder $\Delta u$ angewandte mit dem Product dieser in $r$ identisch ist. Für das gegebene Elementensystem haben wir also, wenn wir die Grössen dritter und höherer Ordnung übergehen,

$$\left.\begin{aligned}\cos b\sin(l-\theta_0-\Gamma) &= \cos i_0\sin(v-\theta_0) - s\left(\lg i_0 + \tfrac{q}{2\cos^2 i_0}\right)\\ \cos b\cos(l-\theta_0-\Gamma) &= \cos(v-\theta_0) + \tfrac{sp}{2\cos^2 i_0}\end{aligned}\right\} \quad (67)$$

und für das unbekannte Elementensystem erhalten wir ähnliche von $(\theta)$, $(i)$, $(\sigma)$, $(s)$, $(p)$, $(q)$ abhängige Gleichungen. Da

$$\Delta s = (s) - s$$

gesetzt wird, und $u = s\frac{r}{a_0}$ ist, so giebt der Ausdruck für $\Delta u$ des vor. Art.

$$\Delta s = \beta\cos i_0\cos(v-\theta_0) - \gamma\cos i_0\sin(v-\theta_0)$$

Da ferner zufolge des Art. 11 (I)

$$p = -s\cos(v-\theta_0) + \frac{ds}{dv}\sin(v-\theta_0)$$
$$q = \quad s\sin(v-\theta_0) + \frac{ds}{dv}\cos(v-\theta_0)$$

Digitized by Google

so wird auch mit der hier erforderlichen Genauigkeit

$$(p) = -(s)\cos(v-\theta_0) + \frac{d(s)}{dv}\sin(v-\theta_0)$$
$$(q) = \quad (s)\sin(v-\theta_0) + \frac{d(s)}{dv}\cos(v-\theta_0)$$

Substituirt man hierin die aus den vorstehenden Gleichungen hervorgehenden Ausdrücke für $(s)$ und $\frac{d(s)}{dv}$, so bekommt man

$$(p) = p - \beta\cos i_0$$
$$(q) = q - \gamma\cos i_0$$

und hiemit wird unser zweites System von Gleichungen

$$\cos b\sin(l-(\theta)-\Gamma) = \cos(i)\sin(v-(\sigma)) - (s)\,\mathrm{tg}\,(i) - \frac{(s)(q-\gamma\cos i_0)}{2\cos^2 i_0}$$
$$\cos b\cos(l-(\theta)-\Gamma) = \cos(v-(\sigma)) + \frac{(s)(p-\beta\cos i_0)}{2\cos^2 i_0}$$

die mit den Gleichungen (67) identificirt werden müssen.

## 140.

Sei

$$\Delta i = (i) - i_0$$
$$\Delta\sigma = (\sigma) - \theta_0$$
$$\Delta\theta = (\theta) - \theta_0$$

dann geben die eben aufgestellten Gleichungen bis auf Grössen dritter Ordnung

$$\begin{aligned}\cos b\sin(l-\theta_0-\Gamma-\Delta\theta) = {}& \\ &\sin(v-\theta_0)\{\cos i_0 - \sin i_0\,\Delta i - \tfrac{1}{2}\cos i_0\,\Delta i^2 - \tfrac{1}{2}\cos i_0\,\Delta\sigma^2\} \\ &+\cos(v-\theta_0)\{-\cos i_0\,\Delta\sigma + \sin i_0\,\Delta i\,\Delta\sigma\} \\ &-s\left(\mathrm{tg}\,i_0 + \frac{q}{2\cos^2 i_0}\right) \\ &-\mathrm{tg}\,i_0\,\Delta s - \frac{(3\Delta i-\gamma)\Delta s}{2\cos^2 i_0} - \frac{(3\Delta i-\gamma)s}{2\cos^2 i_0} - \frac{q\Delta s}{2\cos^2 i_0}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\cos b\cos(l-\theta_0-\Gamma-\Delta\theta) = {}& \\ &\cos(v-\theta_0)\{1-\tfrac{1}{2}\Delta\sigma^2\} + \sin(v-\theta_0)\,\Delta\sigma \\ &+\frac{sp}{2\cos^2 i_0} - \frac{\beta\Delta s}{2\cos i_0} - \frac{\beta s}{2\cos i_0} + \frac{p\Delta s}{2\cos^2 i_0}\end{aligned}$$

Multiplicirt man die erste dieser Gleichungen mit $1-\frac{1}{2}\Delta\theta^2$, die zweite mit $\Delta\theta$ und addirt, so bekommt man

Digitized by Google

$$\cos b \sin(l-\theta_0-\Gamma) = \cos i_0 \sin(v-\theta_0) - s\left(\operatorname{tg} i_0 + \frac{q}{2\cos^2 i_0}\right)$$
$$+\sin(v-\theta_0)\{-\sin i_0 \Delta i - \tfrac{1}{2}\cos i_0 \Delta i^2 - \tfrac{1}{2}\cos i_0 \Delta\sigma^2 - \tfrac{1}{2}\cos i_0 \Delta\theta^2 + \Delta\sigma\Delta\theta\}$$
$$+\cos(v-\theta_0)\{-\cos i_0 \Delta\sigma + \Delta\theta + \sin i_0 \Delta i \Delta\sigma\}$$
$$-\operatorname{tg} i_0 \Delta s - \frac{(2\Delta i-\gamma)\Delta s}{2\cos^2 i_0} - \frac{(2\Delta i-\gamma)s}{2\cos^2 i_0} - \frac{q\Delta s}{2\cos^2 i_0}$$

woraus schon $\Delta\Gamma$ bestimmt werden kann. Um aber zu zeigen, dass auch die zweite analoge Gleichung denselben Werth von $\Delta\Gamma$ giebt, multiplicire ich ferner die erste der obigen Gleichungen mit $-\Delta\theta$, die zweite mit $1-\frac{1}{2}\Delta\theta^2$ und addire, wodurch

$$\cos b \cos(l-\theta_0-\Gamma) = \cos(v-\theta_0) + \frac{sp}{2\cos^2 i_0}$$
$$+\cos(v-\theta_0)\{\cos i_0 \Delta\sigma\Delta\theta - \tfrac{1}{2}\Delta\sigma^2 - \tfrac{1}{2}\Delta\theta^2\}$$
$$+\sin(v-\theta_0)\{\Delta\sigma - \cos i_0 \Delta\theta + \sin i_0 \Delta i \Delta\theta\}$$
$$+\frac{(2\sin i_0 \Delta\theta-\beta)\Delta s}{2\cos i_0} + \frac{(2\sin i_0 \Delta\theta-\beta)s}{2\cos i_0} + \frac{p\Delta s}{2\cos^2 i_0}$$

erlangt wird. Aus dem vorvor. Art. erhalten wir nun

$$\Delta i = \gamma + \beta^2 \frac{\cos i_0}{2\sin i_0} + \gamma^2 \frac{\sin i_0}{2\cos i_0}$$
$$\Delta\sigma = \beta \frac{\cos i_0}{\sin i_0} - \beta\gamma \frac{\cos^2 i_0}{\sin^2 i_0}$$
$$\Delta\theta = \beta \frac{1}{\sin i_0} - \beta\gamma \frac{2-3\sin^2 i_0}{2\sin^2 i_0 \cos i_0} + \Delta\Gamma$$

und es ist ausserdem

$$s = q\sin(v-\theta_0) - p\cos(v-\theta_0)$$
$$\Delta s = \beta\cos i_0 \cos(v-\theta_0) - \gamma\cos i_0 \sin(v-\theta_0)$$

Hiemit ergiebt sich

$$-\sin i_0 i\Delta - \tfrac{1}{2}\cos i_0 \Delta i^2 - \tfrac{1}{2}\cos i_0 \Delta\sigma^2 - \tfrac{1}{2}\cos i_0 \Delta\theta^2 + \Delta\sigma\Delta\theta = -\gamma\sin i_0 - \frac{\gamma}{2\cos i_0}$$
$$-\cos i_0 \Delta\sigma + \Delta\theta + \sin i_0 \Delta i \Delta\sigma = \beta\sin i_0 + \frac{\beta\gamma}{2\cos i_0} + \Delta\Gamma$$
$$-\operatorname{tg} i_0 \Delta s = -\beta\sin i_0 \cos(v-\theta_0) + \gamma\sin i_0 \sin(v-\theta_0)$$
$$-\frac{(2\Delta i-\gamma)\Delta s}{2\cos^2 i_0} = -\frac{\beta\gamma}{2\cos i_0}\cos(v-\theta_0) + \frac{\gamma^2}{2\cos i_0}\sin(v-\theta_0)$$
$$-\frac{(2\Delta i-\gamma)s}{2\cos^2 i_0} = -\frac{q\gamma}{2\cos^2 i_0}\sin(v-\theta_0) + \frac{p\gamma}{2\cos^2 i_0}\cos(v-\theta_0)$$
$$-\frac{q\Delta s}{2\cos^2 i_0} = \frac{q\gamma}{2\cos^2 i_0}\sin(v-\theta_0) - \frac{q\beta}{2\cos^2 i_0}\cos(v-\theta_0)$$

---

$$\cos i_0 \Delta\sigma\Delta\theta - \tfrac{1}{2}\Delta\sigma^2 - \tfrac{1}{2}\Delta\theta^2 = -\tfrac{1}{2}\beta^2$$
$$\Delta\sigma - \cos i_0 \Delta\theta + \sin i_0 \Delta i \Delta\theta = \tfrac{1}{2}\beta\gamma - \cos i_0 \Delta\Gamma$$
$$\frac{(2\sin i_0 \Delta\theta-\beta)\Delta s}{2\cos i_0} = \tfrac{1}{2}\beta^2\cos(v-\theta_0) - \tfrac{1}{2}\beta\gamma\sin(v-\theta_0)$$
$$\frac{(2\sin i_0 \Delta\theta-\beta)s}{2\cos i_0} = \frac{q\beta}{2\cos i_0}\sin(v-\theta_0) - \frac{p\beta}{2\cos i_0}\cos(v-\theta_0)$$
$$\frac{p\Delta s}{2\cos^2 i_0} = -\frac{p\gamma}{2\cos i_0}\sin(v-\theta_0) + \frac{p\beta}{2\cos i_0}\cos(v-\theta_0)$$

Digitized by Google

wodurch die eben abgeleiteten Gleichungen in die folgenden übergehen,

$$\cos b \sin(l-\theta_0-\Gamma) = \cos i_0 \sin(v-\theta_0) - s\left(\operatorname{tg} i_0 + \frac{q}{2\cos^2 i_0}\right) + \cos(v-\theta_0)\left\{\Delta\Gamma + \frac{p\gamma - q\beta}{2\cos^2 i_0}\right\}$$

$$\cos b \cos(l-\theta_0-\Gamma) = \cos(v-\theta_0) + \frac{sp}{2\cos^2 i_0} + \sin(v-\theta_0)\left\{-\cos i_0\, \Delta\Gamma + \frac{q\beta - p\gamma}{2\cos i_0}\right\}$$

Setzt man daher

$$\Delta\Gamma = \frac{q\beta - p\gamma}{2\cos^2 i_0}$$

so werden diese Gleichungen beide mit den (67) identisch, womit die Aufgabe gelöst ist. Es ist leicht zu finden, dass man dem vorstehenden Ausdruck für $\Delta\Gamma$ die folgenden Formen geben kann,

$$\Delta\Gamma = \frac{\Delta z \frac{dz}{dv} - z\frac{d.\Delta z}{dv}}{2\cos^2 i_0}$$

oder

$$\Delta\Gamma = \frac{a_0}{r}\frac{\Delta u \frac{du}{dt} - u\frac{d.\Delta u}{dt}}{2\cos i_0 \cos^2 i_0}$$

In der Regel werden diese Ausdrücke unmerklich sein. Für einen etwaigen Fall, in welchem dieser Ausdruck von $\Delta\Gamma$ merklich werden sollte, bemerke ich, dass er aus einem constanten und einem veränderlichen Theile besteht. Nur der constante Theil darf in den Ausdrücken für $(\theta)$ und $(\pi)$ des Art. 138 angewandt werden, der veränderliche Theil muss dem durch die Elemente $i_0$, $\theta_0$, etc. ursprünglich berechneten Werthe von $\Gamma$ hinzugefügt werden.

## 141.

Indem wir zur Anwendung der eben entwickelten Ausdrücke übergehen, wollen wir zuerst den Ausdruck (64) vornehmen. Setzen wir

$$\bar{A} = -\frac{2-e_0^2}{\cos i_0}\sin\bar{\varepsilon} + \frac{e_0}{2\cos i_0}\sin 2\bar{\varepsilon}$$

$$\bar{B} = -\frac{2+e_0^2}{2\cos i_0} + \frac{2e_0}{\cos i_0}\cos\bar{\varepsilon} - \frac{e_0^2}{2\cos i_0}\cos 2\bar{\varepsilon}$$

und fassen vorläufig die Glieder zweiter Ordnung dieses Ausdrucks unter dem allgemeinen Zeichen $C$ zusammen, so giebt er

$$n\delta(z) = n\delta z - \Delta c + \bar{A}\Delta\varphi + \bar{B}\Delta\chi + C$$

Da die Coefficienten dieses Ausdrucks Functionen der Anomalie $\bar{\varepsilon}$ sind, die mit $n\delta z$ durch folgende Gleichung verbunden sind,

$$nt + c + n\delta z = \bar{\varepsilon} - e_0 \sin\bar{\varepsilon}$$

Digitized by Google

während $n\delta z$ selbst im Vorhergehenden durch die Anomalie $\varepsilon_0$ ausgedrückt ist, die von der folgenden Gleichung abhängt,

$$nt + c = \varepsilon_0 - e_0 \sin \varepsilon_0$$

so muss $\bar{\varepsilon}$ in diesen Coefficienten auf $\varepsilon_0$ hingeführt werden. Es braucht dieses aber nur mit $\overline{A}$ und $\overline{B}$ vorgenommen zu werden, da daraus in $C$ nur Grössen dritter Ordnung entstehen würden. Es ist leicht einzusehen, dass

$$\overline{A} = A + \frac{dA}{dg} n\delta z$$

$$\overline{B} = B + \frac{dB}{dg} n\delta z$$

wird, wenn

$$A = -\frac{2-e_0^2}{\cos \varphi_0} \sin \varepsilon_0 + \frac{e_0}{2 \cos \varphi_0} \sin 2\varepsilon_0$$

$$B = -\frac{2+e_0^2}{2 \cos \varphi_0} + \frac{2e_0}{\cos \varphi_0} \cos \varepsilon_0 - \frac{e_0^2}{2 \cos \varphi_0} \cos 2\varepsilon_0$$

ist. Da

$$\frac{dA}{dg} = \frac{dA}{d\varepsilon} \frac{1}{1 - e_0 \cos \varepsilon_0}; \quad \frac{dB}{dg} = \frac{dB}{d\varepsilon} \frac{1}{1 - e_0 \cos \varepsilon_0}$$

ist, und die Differentialquotienten von $A$ und $B$ nach $\varepsilon$ durch $1 - e_0 \cos \varepsilon_0$ theilbar sind, so wird

$$\frac{dA}{dg} = -\frac{e_0}{\cos \varphi_0} - \frac{2}{\cos \varphi_0} \cos \varepsilon_0; \quad \frac{dB}{dg} = -\frac{2e_0}{\cos \varphi_0} \sin \varepsilon_0$$

und

$$n\delta(z) = n\delta z - \Delta c + A\Delta\varphi + B\Delta\chi + \frac{dA}{dg} n\delta z \, \Delta\varphi + \frac{dB}{dg} n\delta z \, \Delta\chi + C$$

## 142.

Der eben entwickelte Ausdruck enthält alle Glieder, die, wenn man die Grössen dritter Ordnung übergeht, der Strenge nach erforderlich sind; allein es ist noch ein Umstand zu betrachten. Wir sind jetzt im Begriff, den Ort des Planeten von den Elementen $(c)$, $(\varphi)$, $(\chi)$, etc. abhängig zu machen, während im vorstehenden Ausdruck $n\delta(z)$ immer noch von $\varepsilon_0$ und $c$ abhängt. Da man die Werthe der Elemente $e_0$ und $c$ kennt, so kann man auch jedenfalls $n\delta(z)$ durch diese berechnen; allein bequemer und angemessener ist es, den Ausdruck für $n\delta(z)$ so einzurichten, dass er auch von $(e)$ oder $(\varphi)$ und $(c)$ abhängig wird, und es ist klar, dass diese Reduction wieder so ausgeführt werden muss, dass $n\delta(z)$

Digitized by Google

seinen Werth dadurch nicht ändert. Bezeichnen wir die von $(\varphi)$ und $(c)$ abhängige excentrische Anomalie mit $\varepsilon$, so wird

$$nt + (c) = \varepsilon - \sin(\varphi)\sin\varepsilon$$

und ausserdem ist

$$nt + c = \varepsilon_0 - \sin\varphi_0 \sin\varepsilon_0$$

Setzt man daher wieder

$$\Delta c = (c) - c$$
$$\Delta\varphi = (\varphi) - \varphi_0$$
$$\Delta\varepsilon = \varepsilon - \varepsilon_0$$

so wird bis auf Grössen zweiter Ordnung, die hier übergangen werden dürfen,

$$\Delta c = \Delta\varepsilon - e_0\cos\varepsilon\,\Delta\varepsilon - \sin\varepsilon\cos\varphi_0\,\Delta\varphi$$

woraus

$$\varepsilon_0 = \varepsilon - \frac{\Delta c}{1 - e\cos\varepsilon} - \frac{\sin\varepsilon}{1 - e\cos\varepsilon}\cos\varphi\,\Delta\varphi$$

folgt. Der im Vorhergehenden ermittelte Ausdruck für $n\delta z$ ist überdies in seinen Argumenten Function von $i'\mu c$, wo auch $c$ durch $(c)$ zu ersetzen ist, wofür die einfache Relation

$$c = (c) - \Delta c$$

dient. Wenden wir diese Sätze auf den im vor. Art. entwickelten Ausdruck an, übergehen wie immer die Grössen dritter Ordnung, und substituiren die Ausdrücke für $A$, $B$ und $C$, so bekommen wir

$$\begin{aligned}
n\delta(z) = {} & n\delta z - \left\{1 + \frac{dn\delta z}{d\varepsilon}\frac{1}{1 - e\cos\varepsilon} + \frac{dn\delta z}{dc}\right\}\Delta c \\
& + \left\{-\frac{2 - e^2}{\cos\varphi}\sin\varepsilon + \frac{e}{2\cos\varphi}\sin 2\varepsilon - \left[\frac{e}{\cos\varphi} + \frac{2}{\cos\varphi}\cos\varepsilon\right] n\delta z - \frac{dn\delta z}{d\varepsilon}\frac{\sin\varepsilon\cos\varphi}{1 - e\cos\varepsilon}\right\}\Delta\varphi \\
& + \left\{-\frac{2 + e^2}{2\cos\varphi} + \frac{2e}{\cos\varphi}\cos\varepsilon - \frac{e^2}{2\cos\varphi}\cos 2\varepsilon - \frac{2e}{\cos\varphi}\sin\varepsilon\,.\,n\delta z\right\}\Delta\chi \\
& + \left\{\frac{e}{\cos\varphi} + \frac{2}{\cos\varphi}\cos\varepsilon\right\}\Delta c\,\Delta\varphi + \frac{2e}{\cos\varphi}\sin\varepsilon\,.\,\Delta c\,\Delta\chi \\
& + \left\{\frac{5e - 6e^3}{4\cos^2\varphi}\sin\varepsilon + \frac{7 - 5e^2}{4\cos^2\varphi}\sin 2\varepsilon - \frac{e}{4\cos^2\varphi}\sin 3\varepsilon\right\}\Delta\varphi^2 \\
& + \left\{-\frac{e^2}{2\cos^2\varphi} + \frac{4 - e^2}{2\cos^2\varphi}\cos\varepsilon - \frac{6e - 3e^3}{2\cos^2\varphi}\cos 2\varepsilon + \frac{e^2}{2\cos^2\varphi}\cos 3\varepsilon\right\}\Delta\varphi\,\Delta\chi \\
& + \left\{\frac{4e + e^3}{4\cos^2\varphi}\sin\varepsilon - \frac{e^2}{\cos^2\varphi}\sin 2\varepsilon + \frac{e^3}{4\cos^2\varphi}\sin 3\varepsilon\right\}\Delta\chi^2
\end{aligned}$$

Wenn $\Delta c$, $\Delta\varphi$ und $\Delta\chi$ gegeben sind, so wird die Berechnung dieses Ausdrucks am Einfachsten auf dieselbe Art wie die in dieser Abhandlung vorhergehenden Berechnungen Ausdrücke ähnlicher Beschaffenheit ausgeführt. Es werden nemlich die erforderlichen Producte

Digitized by Google

mechanisch gebildet und schliesslich addirt. Wenn die Störungscoefficienten nicht viel grösser sind, wie in dem hier gewählten Beispiel, so ist durch dieses Verfahren die Berechnung des vorstehenden Ausdrucks sehr einfach und kostet nur wenig Zeit. Für die Ausführung dieser Multiplicationen bemerke ich, dass

$$\frac{1}{1-e\cos\varepsilon} = \frac{1}{\cos\varphi} + \frac{2\beta}{\cos\varphi}\cos\varepsilon + \frac{2\beta^2}{\cos\varphi}\cos 2\varepsilon + \text{etc.}$$

$$\frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon} = \frac{1}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\sin\varepsilon + \frac{\beta}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\sin 2\varepsilon + \frac{\beta^2}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\sin 3\varepsilon + \text{etc.}$$

wo wie früher $\beta = \operatorname{tg}\frac{1}{2}\varphi$ ist.

## 143.

Auf dieselbe Art müssen die Ausdrücke (65) und (66) entwickelt werden. Der (65) giebt zuerst

$$\begin{aligned}(\nu) = \nu &+ \tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n} + \left\{\frac{e}{\cos\varphi} + \frac{\cos\varepsilon}{\cos\varphi}\right\}\Delta\varphi + \frac{e\sin\varepsilon}{\cos\varphi}\Delta\chi \\ &- \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}n\delta z\,\Delta\varphi + \frac{1}{\cos\varphi}\frac{e\cos\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}n\delta z\,\Delta\chi \\ &+ \tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n}\nu + \left\{\frac{e}{\cos\varphi} + \frac{\cos\varepsilon}{\cos\varphi}\right\}\Delta\varphi.\nu + \frac{e\sin\varepsilon}{\cos\varphi}\Delta\chi.\nu + D\end{aligned}$$

wo $D$ die Summe der Glieder der zweiten Ordnung in (65) bezeichnet. Der vorstehende Ausdruck verlangt, dass man immer noch in dem daraus nach der Substitution der betreffenden Grössen hervorgehenden die durch $c$ und $e_0$ zu berechnende Anomalie $\varepsilon_0$ substituire. Durch die im vor. Art. entwickelten Ausdrücke verwandelt man ihn aber in einen solchen, in welchem die durch $(c)$ und $(e)$ zu berechnende Anomalie zu setzen ist. Diese Verwandelung giebt

$$\begin{aligned}(\nu) = \nu &+ \tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n} + \left\{\frac{e}{\cos\varphi} + \frac{\cos\varepsilon}{\cos\varphi}\right\}\Delta\varphi + \frac{e\sin\varepsilon}{\cos\varphi}\Delta\chi \\ &+ \tfrac{2}{3}\frac{\Delta n}{n}\nu + \left\{\frac{e}{\cos\varphi} + \frac{\cos\varepsilon}{\cos\varphi}\right\}\Delta\varphi.\nu + \frac{e\sin\varepsilon}{\cos\varphi}\Delta\chi.\nu \\ &- \frac{dv}{d\varepsilon}\frac{\Delta c}{1-e\cos\varepsilon} - \frac{dv}{dc}\Delta c - \frac{dv}{d\varepsilon}\frac{\sin\varepsilon\cos\varphi}{1-e\cos\varepsilon}\Delta\varphi \\ &- \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\Delta\varphi.n\delta z + \frac{1}{\cos\varphi}\frac{e\cos\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\Delta\chi.n\delta z \\ &- \tfrac{1}{2}\left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2 + \left\{\frac{2e}{3\cos\varphi} + \frac{2}{3\cos\varphi}\cos\varepsilon\right\}\frac{\Delta n}{n}\Delta\varphi + \frac{2e}{3\cos\varphi}\sin\varepsilon.\frac{\Delta n}{n}\Delta\chi \\ &+ \frac{1}{\cos\varphi}\frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\Delta c\,\Delta\varphi - \frac{1}{\cos\varphi}\frac{e\cos\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\Delta c\,\Delta\chi \\ &+ \left\{\frac{2+e^2}{2\cos^2\varphi} + \frac{3e}{2\cos^2\varphi}\cos\varepsilon + \frac{\sin^2\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\right\}\Delta\varphi^2 \\ &+ \left\{\frac{1+e^2}{\cos^2\varphi}\sin\varepsilon - \frac{e\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\right\}\Delta\varphi\,\Delta\chi + \left\{\frac{e^2}{2\cos^2\varphi} - \frac{e\cos\varepsilon}{2\cos^2\varphi}\right\}\Delta\chi^2\end{aligned}$$

wo wieder allenthalben $e_0$ und $\varphi_0$ für $e$ und $\varphi$ gelesen werden muss.



Digitized by Google

Die hier nach ihrer Entwickelung in unendliche Reihen anzuwendenden Functionen sind ausser den schon im vor. Art. angeführten

$$\frac{e\cos\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon} = \frac{2\beta^2\cos^2\frac{1}{2}\varphi}{\cos\varphi} + \frac{2\beta}{\cos\varphi}\cos\varepsilon + \frac{2\beta^2}{\cos\varphi}\cos 2\varepsilon + \text{etc.}$$

$$\frac{\sin^2\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon} = \frac{1}{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi} + \frac{\beta}{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\cos\varepsilon - \frac{\cos\varphi}{2\cos^4\frac{1}{2}\varphi}\cos 2\varepsilon - \frac{\beta\cos\varphi}{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\cos 3\varepsilon - \text{etc.}$$

$$\frac{e\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon} = \beta^2\sin\varepsilon + \frac{\beta}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\sin 2\varepsilon + \frac{\beta^2}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\sin 3\varepsilon + \text{etc.}$$

## 144.

Gehen wir zur Entwickelung des Ausdrucks (66) über, und setzen zur Abkürzung

$$B = \beta\cos(\pi_0-\theta_0) - \gamma\sin(\pi_0-\theta_0)$$
$$C = \beta\sin(\pi_0-\theta_0) + \gamma\cos(\pi_0-\theta_0)$$

dann wird er

$$\frac{\Delta u}{\cos i_0} = -e_0 B - C\sin\bar{\varepsilon} + B\cos\bar{\varepsilon}$$

und substituiren wir hier den Ausdruck für $\Delta u$, so wird

$$\frac{(u)}{\cos i} = \left\{\frac{u}{\cos i} - e_0 B - C\sin\bar{\varepsilon} + B\cos\bar{\varepsilon}\right\}\frac{a_0(1+\nu)}{(a)(1+(\nu))}$$

Die erste Entwickelung giebt hier

$$\begin{aligned}
\frac{(u)}{\cos i} = {} & \frac{u}{\cos i} - eB - C\sin\varepsilon + B\cos\varepsilon \\
& + \tfrac{3}{2}\frac{u}{\cos i}\frac{\Delta n}{n} - \tfrac{3}{2}eB\frac{\Delta n}{n} - \tfrac{3}{2}C\frac{\Delta n}{n}\sin\varepsilon + \tfrac{3}{2}B\frac{\Delta n}{n}\cos\varepsilon \\
& - \frac{u}{\cos i}((\nu)-\nu) + eB((\nu)-\nu) + C((\nu)-\nu)\sin\varepsilon - B((\nu)-\nu)\cos\varepsilon \\
& - C\frac{\cos\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}n\delta z - B\frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}n\delta z
\end{aligned}$$

wo wieder $\varepsilon_0$ angewandt werden muss. Führt man die weitere Reduction aus um $\varepsilon$ einzuführen, so erhält man

$$\begin{aligned}
\frac{(u)}{\cos i} = {} & \frac{u}{\cos i} - eB - C\sin\varepsilon + B\cos\varepsilon \\
& - \frac{\frac{du}{dc}}{\cos i}\frac{\Delta c}{1-e\cos\varepsilon} - \frac{\frac{du}{dc}}{\cos i}\Delta c - \frac{\frac{du}{dc}}{\cos i}\frac{\sin\varepsilon\cos\varphi}{1-e\cos\varepsilon}\Delta\varphi \\
& + \tfrac{3}{2}\frac{u}{\cos i}\frac{\Delta n}{n} - \tfrac{3}{2}eB\frac{\Delta n}{n} - \tfrac{3}{2}C\frac{\Delta n}{n}\sin\varepsilon + \tfrac{3}{2}B\frac{\Delta n}{n}\cos\varepsilon \\
& - \frac{u}{\cos i}((\nu)-\nu) + eB((\nu)-\nu) + C((\nu)-\nu)\sin\varepsilon - B((\nu)-\nu)\cos\varepsilon \\
& - C\frac{\cos\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}n\delta z - B\frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}n\delta z \\
& + \frac{\cos\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}C\Delta c + \frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}B\Delta c \\
& + \frac{\sin\varepsilon\cos\varphi}{1-e\cos\varepsilon}\cos\varphi\, C\Delta\varphi + \frac{\sin^2\varepsilon\cos\varphi}{1-e\cos\varepsilon}B\Delta\varphi
\end{aligned}$$

Digitized by Google

wo ich alle Glieder angesetzt habe, obgleich in der Regel viele derselben unmerklich sein werden.

## 145.

Die im Vorhergehenden eingeführten Aenderungen der elliptischen Elemente wollen wir nun so bestimmen, dass die mittleren Elemente daraus hervorgehen. Setzen wir

$$\begin{aligned} n\delta z = {} & a_1 \sin\varepsilon + a_2 \sin 2\varepsilon + a_3 \sin 3\varepsilon + \dots \\ & + b_1 \cos\varepsilon + b_2 \cos 2\varepsilon + b_3 \cos 3\varepsilon + \dots \end{aligned}$$

indem es sich hier nur um die Glieder handelt, die vom Index $i'$ unabhängig sind, substituiren diesen Ausdruck nebst den anderen Ausdrücken in den Ausdruck für $n\delta(z)$ des Art. 142, und nehmen hiebei nur auf das constante Glied und die mit $\sin\varepsilon$ und $\cos\varepsilon$ multiplicirten Glieder Rücksicht, so ergiebt sich

$$\begin{aligned} n\delta(z) = {} & \left\{ \begin{array}{l} -\Delta c \left\{ 1 + \frac{\beta}{\cos\varphi} a_1 + \frac{2\beta^2}{\cos\varphi} a_2 + \frac{3\beta^3}{\cos\varphi} a_3 + \dots \right\} \\ + \Delta\varphi \left\{ \left( \frac{\cos\varphi}{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi} - \frac{1}{\cos\varphi} \right) b_1 + \frac{\cos\varphi}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi} \beta b_2 + \frac{3\cos\varphi}{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi} \beta^2 b_3 + \dots \right\} \\ - \Delta\chi \left\{ \frac{2+e^2}{2\cos\varphi} + \frac{e}{\cos\varphi} a_1 \right\} + \Delta c\, \Delta\varphi \frac{e}{\cos\varphi} - \Delta\varphi\, \Delta\chi \frac{e^2}{2\cos^2\varphi} \end{array} \right\} \\ + & \left\{ \begin{array}{l} a_1 - \Delta c \left\{ \frac{1+\beta^2}{\cos^2\varphi} a_1 + \frac{2\beta(1+\beta^2)}{\cos\varphi} a_2 + \frac{3\beta^2(1+\beta^2)}{\cos\varphi} a_3 + \dots \right\} \\ - \Delta\varphi \left\{ \frac{2-e^2}{2\cos\varphi} + \left( \frac{\cos\varphi}{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi} \beta + \frac{e}{\cos\varphi} \right) a_1 - \left( \frac{(1-\beta^2)\cos\varphi}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi} - \frac{1}{\cos\varphi} \right) a_2 \right. \\ \qquad \left. - \frac{3\beta(1-\beta^2)\cos\varphi}{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi} a_3 + \dots \right\} \\ + \Delta\chi \frac{e}{\cos\varphi} b_2 + \Delta c\, \Delta\chi \frac{2e}{\cos\varphi} + \Delta\varphi^2 \frac{5e-6e^3}{4\cos^2\varphi} + \Delta\chi^2 \frac{4e+e^3}{4\cos^2\varphi} \end{array} \right\} \sin\varepsilon \\ + & \left\{ \begin{array}{l} b_1 + \Delta c \left\{ \frac{1-\beta^2}{\cos\varphi} b_1 + \frac{2\beta(1-\beta^2)}{\cos\varphi} b_2 + \frac{3\beta^2(1-\beta^2)}{\cos\varphi} b_3 + \dots \right. \\ + \Delta\varphi \left\{ \left( \frac{\cos\varphi}{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi} \beta - \frac{e}{\cos\varphi} \right) b_1 + \left( \frac{(1+\beta^2)\cos\varphi}{\cos^2\frac{1}{2}\varphi} - \frac{1}{\cos\varphi} \right) b_2 \right. \\ \qquad \left. + \frac{3\beta(1+\beta^2)}{2\cos^2\frac{1}{2}\varphi} b_3 + \dots \right\} \\ + \Delta\chi \left\{ \frac{2e}{\cos\varphi} - \frac{e}{\cos\varphi} a_2 \right\} + \Delta c\, \Delta\varphi \frac{2}{\cos\varepsilon} + \Delta\varphi\, \Delta\chi \frac{4-e^2}{2\cos^2\varphi} \end{array} \right\} \cos\varepsilon \end{aligned}$$

Wenn nun $n\delta(z)$ sich auf die mittleren Elemente beziehen soll, so müssen den in diesen Abhandlungen gegebenen Definitionen zufolge in dem vorstehenden Ausdruck die Coefficienten von $\sin\varepsilon$ und $\cos\varepsilon$ jeder für sich gleich Null sein. Damit ferner das Element $(c)$ vollständig in

$$nt + (c) = (g)$$



Digitized by Google

enthalten sei, muss überdiess das constante Glied des vorstehenden Ausdrucks auch gleich Null sein. Setzen wir nun diese drei Coefficienten jeden für sich gleich Null, entwickeln aus diesen Gleichungen die Ausdrücke für $\Delta\varphi$, $\Delta\chi$, $\Delta c$ und übergehen dabei wie immer die Grössen dritter Ordnung in Bezug auf die störende Kraft, so bekommen wir

$$\begin{aligned}
\Delta\varphi = {} & \tfrac{\cos\varphi}{2-e^2}a_1 - \cos\varphi\cos^6\tfrac{1}{2}\varphi\,\tfrac{5+10\beta^2+7\beta^4-4\beta^6+2\beta^8}{2(2-e^2)^3}\beta a_1^2 \\
& - \cos\varphi\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\,\tfrac{4-3\beta^2+\beta^4}{(2-e^2)^2}\beta^2 a_1 a_2 + \tfrac{3\cos^4\varphi}{2(2-e^2)^2\cos^4\frac{1}{2}\varphi}\beta a_1 a_3 + \ldots \\
& + \cos\varphi\cos^4\tfrac{1}{2}\varphi\,\tfrac{1+5\beta^2+9\beta^4+2\beta^6}{4e(2-e^2)}\,b_1^2 \\
& + \cos\varphi\cos^2\tfrac{1}{2}\varphi\,\tfrac{4+5\beta^2+\beta^4}{2(2-e^2)}\beta^2 b_1 b_2 + 3\cos\varphi\,\tfrac{2+e^2}{8(2-e^2)\cos^4\frac{1}{2}\varphi}\,\beta b_1 b_3 + \ldots \\
\Delta\chi = {} & -\tfrac{\cos\varphi}{2e}b_1 + \tfrac{\cos^4\frac{1}{2}\varphi}{2e^2(2-e^2)}(1+4\beta^2+4\beta^4+\beta^6+2\beta^8)a_1 b_1 \\
& + \tfrac{\cos\varphi(2-\beta^2)}{4(2-e^2)\cos^2\frac{1}{2}\varphi}\beta a_1 b_2 - \tfrac{3\cos^3\varphi}{8(2-e^2)\cos^4\frac{1}{2}\varphi}a_1 b_3 - \ldots \\
& + \tfrac{1}{8}(6+5\beta^2+\beta^4)\beta b_1 b_2 + 3\,\tfrac{2+e^2}{32\cos^4\frac{1}{2}\varphi}\,b_1 a_3 + \ldots \\
\Delta c = {} & \tfrac{2+e^2}{4e}b_1 - \tfrac{\cos^{10}\frac{1}{2}\varphi}{2e^2(2-e^2)\cos\varphi}(1+8\beta^2+58\beta^4+53\beta^6+30\beta^8+26\beta^{10}+4\beta^{12})a_1 b_1 \\
& + \tfrac{\cos^2\frac{1}{2}\varphi}{4(2-e^2)}(2-15\beta^2+6\beta^4+\beta^6)\beta a_1 b_2 + \tfrac{3\cos^2\varphi}{8(2-e^2)\cos^4\frac{1}{2}\varphi}(1+8\beta^2+\beta^4)a_1 b_3 + \ldots \\
& - \tfrac{2+e^2}{16\cos\varphi}(2+\beta^2+\beta^4)\beta b_1 a_2 - 3\,\tfrac{2+e^2}{32\cos\varphi\cos^2\frac{1}{2}\varphi}(1+\beta^4)b_1 a_3 - \ldots
\end{aligned}$$

Wenn hiedurch $\Delta\varphi$, $\Delta\chi$, $\Delta c$ berechnet sind, so bekommt man

$$\begin{aligned}
(\varphi) &= \varphi_0 + \Delta\varphi \\
(\chi) &= \pi_0 + \Delta\chi \\
(c) &= c + \Delta c
\end{aligned}$$

wo nun $(\varphi)$, $(\chi)$ und $(c)$ mittlere Elemente sind.

## 146.

Um die mittleren Elemente $(i)$ und $(\sigma)$ zu erhalten, setze ich mit Uebergehung der kleinen Glieder, die schon in den vorstehenden Formeln wohl nie etwas Merkliches werden geben können, und daher in den jetzt zu entwickelnden um so mehr unmerklich sein werden,

$$\begin{aligned}
n\delta z &= a\sin\varepsilon + b\cos\varepsilon \\
(\nu) - \nu &= f\cos\varepsilon + g\sin\varepsilon \\
\tfrac{u}{\cos i} &= h\sin\varepsilon + k\cos\varepsilon
\end{aligned}$$

Digitized by Google

Die Substitution dieser so wie der übrigen Ausdrücke in den Ausdruck für $(u)$ des Art. 144 giebt, wenn wir nur die beiden mit $\sin\varepsilon$ und $\cos\varepsilon$ multiplicirten Glieder aufnehmen,

$$\frac{(u)}{\cos i} = \left\{\begin{array}{l} h - C + \Delta c\left(\frac{k(1-\beta^2)}{\cos\varphi} + \frac{B}{\cos^3\frac{1}{2}\varphi}\right) \\ -\Delta\varphi\left(\frac{h\cos\varphi}{2\cos^3\frac{1}{2}\varphi} - \frac{c\cos\varphi}{2\cos^3\frac{1}{2}\varphi}\right)\beta + \frac{2}{3}(h-C)\frac{\Delta n}{n} \\ + eBg + \left(\frac{1}{2\cos\varphi\cos^3\frac{1}{2}\varphi} - \frac{1}{\cos\varphi}\right)\beta Ca - \frac{\beta Bb}{2\cos^3\frac{1}{2}\varphi} \end{array}\right\}\sin\varepsilon$$

$$+\left\{\begin{array}{l} k + B - \Delta c\left(\frac{h(1+\beta^2)}{\cos\varphi} - \frac{C}{\cos\varphi\cos^3\frac{1}{2}\varphi}\right) \\ + \Delta\varphi\left(\frac{k\cos\varphi}{2\cos^3\frac{1}{2}\varphi} + \frac{B\cos\varphi}{2\cos^3\frac{1}{2}\varphi}\right)\beta + \frac{2}{3}(k+B)\frac{\Delta n}{n} \\ + eBf - \left(\frac{1}{2\cos\varphi\cos^3\frac{1}{2}\varphi} + \frac{1}{\cos\varphi}\right)\beta Cb - \frac{\beta Ba}{2\cos^3\frac{1}{2}\varphi} \end{array}\right\}\cos\varepsilon$$

Da nun, wenn $B$ und $C$ mittleren Elementen entsprechen sollen, auch diese beiden Coefficienten jeder für sich gleich Null sein müssen, so bekommen wir durch die Auflösung der beiden aus diesen Bedingungen entstehenden Gleichungen

$$C = \quad h - ekg - \frac{\beta}{2\cos^3\frac{1}{2}\varphi}ha + \frac{\beta}{2\cos^3\frac{1}{2}\varphi}kb$$

$$B = -k - ekf + \frac{3\beta+\beta^3}{2\cos\varphi}hb - \frac{\beta}{2\cos^3\frac{1}{2}\varphi}ka$$

hat man hieraus $C$ und $B$ berechnet, so erhält man $\beta$ und $\gamma$ aus den folgenden

$$\beta = \quad B\cos(\pi_0-\theta_0) + C\sin(\pi_0-\theta_0)$$
$$\gamma = -B\sin(\pi_0-\theta_0) + C\cos(\pi_0-\theta_0)$$

und dann wird zufolge des Art. 138

$$\Delta i = \gamma \qquad + \tfrac{1}{4}\beta^2\operatorname{cotg} i_0 + \tfrac{1}{4}\gamma^2\operatorname{tg} i_0$$
$$\Delta\sigma = \beta\operatorname{cotg} i_0 - \beta\gamma\operatorname{cotg}^2 i_0$$

worauf

$$(i) = i_0 + \Delta i$$
$$(\sigma) = \theta_0 + \Delta\sigma$$
$$(\theta) = (\sigma) + 2\sin^2\tfrac{1}{2}i_0 . \Delta\sigma$$
$$(\pi) = (\chi) + 2\sin^2\tfrac{1}{2}i_0 . \Delta\sigma$$

wird. Statt der beiden letzten dieser kann man auch, wenn man es für nöthig halten sollte, die im Art. 138 für $(\theta)$ und $(\pi)$ besonders angeführten anwenden.

Nachdem diese Bestimmungen ausgeführt worden sind, werden durch die Ausdrücke der Artt. 142, 143, 144 die Coefficienten in $n\delta(z)$, $(\nu)$, $\frac{(u)}{\cos i}$ berechnet.

Digitized by Google

## 147.

Zur Anwendung der vorstehenden Entwickelungen auf unser Beispiel übergehend, entnehme ich zuerst aus dem Art. 132 die folgenden numerischen Werthe

$$a_1 = +\ 820''.80\,;\ b_1 = -\ 677''.90$$
$$a_2 = -\ 19.55\,;\ b_2 = +\ 13.50$$
$$a_3 = +\ 0.10\,;\ b_3 = -\ 0.08$$

von welchen indess nur $a_1$ und $b_1$ hier von merklichem Einfluss sind. Es ergiebt sich hiemit durch die Ausdrücke des Art. 145

$$\Delta\varphi = +\ 6'\ 53''.64$$
$$\Delta\chi = +\ 1^0\ 4\ 35.1$$
$$\Delta c = -\ 1\ 5\ 4.1$$

und hiemit habe ich sofort die Verbesserung der Coefficenten von $n\delta z$ und $\nu$ berechnet. Die dazu erforderlichen Factoren und übrigen Hülfsgrössen haben die folgenden numerischen Werthe, für $n\delta(z) - n\delta z$ ist

$$-\frac{\Delta c}{1-e\cos\varepsilon} = (8.27867) + 2(6.9084)\cos\varepsilon + 2(5.538)\cos 2\varepsilon$$
$$\log(-\mu\Delta c) = 7.8194$$
$$-(-2\mu\Delta c) = 8.1204$$
$$-(-3\mu\Delta c) = 8.2965$$
$$-(-4\mu\Delta c) = 8.4215$$
$$-(-5\mu\Delta c) = 8.5184$$
$$-(-6\mu\Delta c) = 8.5973$$
$$-\left\{\frac{e}{\cos\varphi} + \frac{3}{\cos\varphi}\cos\varepsilon\right\}\Delta\varphi = -(6.234) - 2(7.3037)\cos\varepsilon$$
$$-\frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\cos\varphi\,\Delta\varphi = -2(7.0000)\sin\varepsilon - 2(5.629)\sin 2\varepsilon - 2(4.260)\sin 3\varepsilon$$
$$-\frac{2e}{\cos\varphi}\sin\varepsilon.\Delta\chi = -2(7.2039)\sin\varepsilon$$
$$\left\{-\frac{2-e^2}{\cos\varphi}\sin\varepsilon + \frac{e}{2\cos\varphi}\sin 2\varepsilon\right\}\Delta\varphi = -827''.32\sin\varepsilon + 17''.65\sin 2\varepsilon$$
$$\left\{-\frac{2+e^2}{2\cos\varphi} + \frac{2e}{\cos\varphi}\cos\varepsilon - \frac{e^2}{2\cos\varphi}\cos 2\varepsilon\right\}\Delta\chi = -3903''.3 + 661''.91\cos\varepsilon - 14''.08\cos 2\varepsilon$$
$$\left\{\frac{e}{\cos\varphi} + \frac{3}{\cos\varphi}\cos\varepsilon\right\}\Delta c\,\Delta\varphi = -0''.67 - 15''.71\cos\varepsilon$$
$$\frac{2e}{\cos\varphi}\sin\varepsilon.\Delta c\,\Delta\chi = -12''.49\sin\varepsilon$$
$$\left\{\frac{5e-6e^3}{4\cos^3\varphi}\sin\varepsilon + \frac{7-5e^2}{4\cos^2\varphi}\sin 2\varepsilon - \frac{e}{4\cos^2\varphi}\sin 3\varepsilon\right\}\Delta\varphi^2 = +0''.09\sin\varepsilon + 1''.46\sin 2\varepsilon - 0''.02\sin 3\varepsilon$$

Digitized by Google

$$\left\{-\frac{e^2}{2\cos^4\varphi}+\frac{4-e^2}{2\cos^2\varphi}\cos\varepsilon-\frac{6e-3e^3}{2\cos^2\varphi}\cos 2\varepsilon+\frac{e^3}{2\cos^4\varphi}\cos 3\varepsilon\right\}\Delta\varphi\,\Delta\chi=$$
$$0''.00+15''.63\cos\varepsilon-1''.99\cos 2\varepsilon+0''.03\cos 3\varepsilon$$

$$\left\{\frac{4e+e^3}{4\cos^2\varphi}\sin\varepsilon-\frac{e^3}{\cos^2\varphi}\sin 2\varepsilon+\frac{e^3}{4\cos^2\varphi}\sin 3\varepsilon\right\}\Delta\chi^2=$$
$$+6''.25\sin\varepsilon-0''.53\sin 2\varepsilon+0''.01\sin 3\varepsilon$$

Für $(\nu)-\nu$ werden ausser den vorstehenden Ausdrücken für $\frac{\Delta c}{1-e\cos\varepsilon}$, den Logarithmen von $-i''\mu\Delta c$, und $\frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\cos\varphi\,\Delta\varphi$, die folgenden gebraucht,

$$\left\{\frac{e}{\cos\varphi}+\frac{\cos\varepsilon}{\cos\varphi}\right\}\Delta\varphi=(6.234)+2(7.0027)\cos\varepsilon$$
$$\frac{e\sin\varepsilon}{\cos\varphi}\Delta\chi=2(6.9029)\sin\varepsilon$$
$$\tfrac{1}{3}\frac{\Delta n}{n}=-(5.903)=-16''.49$$
$$-\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\Delta\varphi=-2(7.0032)\sin\varepsilon-2(5.633)\sin 2\varepsilon$$
$$\frac{1}{\cos\varphi}\frac{e\cos\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\Delta\chi=(5.837)+2(6.9067)\cos\varepsilon+2(5.536)\cos 2\varepsilon$$
$$\left\{\frac{e}{\cos\varphi}+\frac{\cos\varepsilon}{\cos\varphi}\right\}\Delta\varphi=+35''.33+415''.15\cos\varepsilon$$
$$\frac{e\sin\varepsilon}{\cos\varphi}\Delta\chi=+330''.96\sin\varepsilon$$
$$\tfrac{1}{2}\left(\frac{\Delta n}{n}\right)^2=0''.00$$
$$\tfrac{1}{3}\left\{\frac{e}{\cos\varphi}+\frac{\cos\varepsilon}{\cos\varphi}\right\}\frac{\Delta n}{n}\Delta\varphi=0''.00-0''.03\cos\varepsilon$$
$$\tfrac{2}{3}\frac{\sin\varepsilon}{\cos\varphi}\frac{\Delta n}{n}\Delta\chi=-0''.03\sin\varepsilon$$
$$\frac{1}{\cos\varphi}\frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\Delta c\,\Delta\varphi=-7''.87\sin\varepsilon-0''.34\sin 2\varepsilon-0''.01\sin 3\varepsilon$$
$$-\frac{1}{\cos\varphi}\frac{e\cos\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\Delta c\,\Delta\chi=+0''.27+6''.30\cos\varepsilon+0''.27\cos 2\varepsilon+0''.01\cos 3\varepsilon$$

$$\left\{\frac{2+e^2}{2\cos^2\varphi}+\frac{3e}{2\cos^2\varphi}\cos\varepsilon+\frac{\sin^2\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\right\}\Delta\varphi^2=+1''.25+0''.12\cos\varepsilon-0''.41\cos 2\varepsilon-0''.02\cos 3\varepsilon$$

$$\left\{\frac{1+e^2}{\cos^2\varphi}\sin\varepsilon-\frac{e\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\right\}\Delta\varphi\,\Delta\chi=+7''.87\sin\varepsilon-0''.33\sin 2\varepsilon-0''.01\sin 3\varepsilon$$

$$\left\{\frac{e^2}{2\cos^2\varphi}-\frac{e\cos\varepsilon}{2\cos^2\varphi}\right\}\Delta\chi^2=+0''.27-3''.12\cos\varepsilon$$

und hiemit ergeben sich die folgenden Unterschiede:

Digitized by Google

| | $n\delta(z) - n\delta z$ | | $(v) - v$ | |
|---|---|---|---|---|
| | sin | cos | cos | sin |
| 0,0 | | +0".1 | | +17".89 |
| 1,0 | −820".78 | +677".54 | +444".82 | +338".63 |
| 2,0 | +17".24 | −12".78 | +0".44 | −0".38 |
| 3,0 | 0".00 | −0".03 | +0".02 | +0".02 |
| −2,−1 | +0".02 | −0".02 | 0".00 | +0".02 |
| −1,−1 | +0".04 | +0".05 | +0".05 | −0".03 |
| 0,−1 | −0".17 | +0".10 | −0".20 | −0".15 |
| 1,−1 | +2".19 | +0".82 | −0".81 | +0".28 |
| 2,−1 | +0".06 | +0".40 | −0".04 | +0".16 |
| 3,−1 | +0".04 | −0".01 | −0".03 | 0".00 |
| −1,−2 | +0".01 | −0".05 | +0".02 | 0".00 |
| 0,−2 | +0".09 | +0".77 | +0".07 | −0".44 |
| 1,−2 | +3".14 | −2".84 | −0".52 | −1".55 |
| 2,−2 | +5".79 | −7".41 | −3".28 | −4".30 |
| 3,−2 | +0".78 | −0".19 | −0".34 | −0".06 |
| 4,−2 | −0".05 | +0".02 | −0".01 | +0".01 |
| −1,−3 | +0".07 | +0".07 | +0".02 | −0".07 |
| 0,−3 | +0".27 | +2".35 | +0".54 | −1".07 |
| 1,−3 | +11".44 | −12".27 | −1".20 | +1".99 |
| 2,−3 | +2".19 | +28".50 | −0".93 | +13".75 |
| 3,−3 | −1".37 | +2".01 | +0".08 | +1".35 |
| 4,−3 | −0".01 | +0".07 | +0".01 | +0".07 |
| 1,−4 | −0".07 | −0".08 | −0".05 | +0".07 |
| 2,−4 | +0".15 | +1".19 | −0".15 | +0".37 |
| 3,−4 | +1".02 | +0".39 | −0".60 | +0".26 |
| 4,−4 | −0".34 | +0".20 | +0".26 | +0".12 |
| 5,−4 | −0".02 | −0".01 | +0".01 | +0".01 |
| 1,−5 | −0".06 | −0".03 | −0".01 | +0".02 |
| 2,−5 | −0".15 | +0".71 | −0".01 | +0".09 |
| 3,−5 | +0".89 | +0".03 | −0".24 | +0".04 |
| 4,−5 | −0".13 | +0".22 | +0".10 | +0".14 |
| 5,−5 | 0".00 | −0".12 | 0".00 | −0".10 |
| 1,−6 | −0".04 | +0".04 | −0".02 | +0".01 |
| 2,−6 | −0".07 | +0".71 | +0".02 | −0".05 |
| 3,−6 | −0".75 | −0".31 | +0".35 | −0".08 |
| 4,−6 | 0".00 | +0".14 | +0".03 | +0".09 |
| 5,−6 | −0".05 | −0".08 | +0".04 | −0".07 |
| 6,−6 | −0".02 | +0".01 | −0".03 | 0".00 |

| | $t$ sin | $t$ cos | $t$ cos | $t$ sin |
|---|---|---|---|---|
| 0,0 | | +0".00614 | −0".00390 | |
| 1,0 | +0".08887 | −0".03359 | −0".04447 | −0".01744 |
| 2,0 | +0".01285 | +0".01075 | −0".00573 | +0".00304 |
| 3,0 | −0".00049 | −0".00021 | −0".00027 | −0".00006 |

Digitized by Google

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| −1, −1 | +0.00004 | −0″00009 | +0″00003 | +0″00003 |
| 0, −1 | 0.00000 | −0.00003 | 0.00000 | 0.00000 |
| 1, −1 | +0.00002 | −0.00003 | 0.00000 | −0.00001 |
| 2, −1 | +0.00001 | −0.00009 | −0.00001 | −0.00005 |
| 0, −2 | −0.00001 | +0.00009 | −0.00004 | 0.00000 |
| 1, −2 | +0.00030 | +0.00046 | −0.00003 | +0.00008 |
| 2, −2 | −0.00033 | −0.00014 | +0.00014 | −0.00005 |
| 3, −2 | −0.00015 | −0.00005 | +0.00007 | −0.00002 |
| 0, −3 | −0.00088 | +0.00123 | −0.00043 | −0.00047 |
| 1, −3 | +0.01084 | −0.00053 | +0.00034 | +0.00020 |
| 2, −3 | −0.00141 | +0.00208 | +0.00066 | +0.00078 |
| 3, −3 | +0.00038 | −0.00035 | −0.00016 | −0.00011 |
| 4, −3 | +0.00005 | +0.00001 | −0.00002 | 0.00000 |

| | $t_1^0$ sin | $t_1^0$ cos | $t_1^0$ cos | $t_1^0$ sin |
|---|---|---|---|---|
| 0,0 | | +0″006 | +0″024 | |
| 1,0 | −0″040 | −0.194 | +0.022 | −0″098 |
| 2,0 | +0.019 | −0.030 | −0.008 | −0.007 |
| 3,0 | 0.000 | 0.000 | 0.000 | 0.000 |

Ich bemerke hiezu Folgendes. Weiter wie bis $i'=6$ habe ich zu gehen nicht für nöthig gehalten, indem bei den folgenden kleinen Coefficienten die Verbesserungen unmerklich oder nur sehr unbedeutend ausfallen würden. In den kleinen Störungsgliedern werden meistens nur von den ganzen Ausdrücken von $n\delta(z)$ und $(\nu)$ nur das erste Glied von

$$\frac{dn\delta z}{d\varepsilon}\ \frac{\Delta c}{1-e\cos\varepsilon}\ ,\quad \frac{d\nu}{d\varepsilon}\ \frac{\Delta c}{1-e\cos\varepsilon}$$

und die Glieder $\frac{dn\delta z}{dc}\Delta c$, $\frac{d\nu}{dc}\Delta c$ merklich, und alle übrigen Glieder hätten im Grunde übergangen werden können. Wenn man zum vorstehenden Ausdruck von $n\delta(z)-n\delta z$ den Ausdruck von $n\delta z$ des Art. 132 addirt, müssen in Folge des Vorhergehenden das constante Glied und die Coefficienten von $\sin\varepsilon$ und $\cos\varepsilon$ gleich Null werden. In Bezug auf die beiden ersten findet diese Bedingung auch zur Gnüge statt, aber in dem Coefficienten von $\cos\varepsilon$ bleiben 0″36 übrig. Ich habe meine Entwickelungen und Rechnungen, nachdem ich dieses bemerkt hatte, noch einmal durchgesehen, woraus sich ergeben hat, dass diese 0″36 von den übergangenen Gliedern dritter Ordnung herrühren, die in dem grossen Werth von $\Delta\chi$, welcher hier statt findet, um so viel hervortreten; übrigens ist dieser Umstand ohne weitere Folgen auf das Resultat. Die Glieder zweiter Ordnung in $\Delta\chi$ betragen in diesem Beispiel −93″6.

Digitized by Google

Der vorstehende Ausdruck von $n\delta(z)-n\delta z$ giebt ferner zu erkennen, dass die Umwandelung der osculirenden Elemente in mittlere ein kleines Glied in der mittleren Bewegung. und eines in der Säcularänderung der mittleren Länge bewirkt. Beide sind aber sehr unbedeutend, denn jenes beträgt jährlich nur 0:006, und dieses im ersten Jahrhundert nur 0:006.

## 148.

Gehen wir nun zu den Breitenstörungen über, so ist erstlich

$$a = +820{:}80\ ,\quad b = -677{:}90$$
$$f = +411.82\ ,\quad g = +338.63$$
$$h = -111.47\ ,\quad k = -\ 22.08$$

und hieraus folgt durch die Ausdrücke des Art. 146, da die Glieder zweiter Ordnung hier höchst unbedeutend sind,

$$C = -111{:}47;\quad B = +22{:}08$$

und hieraus folgt

$$\Delta i = -48{:}59;\ \Delta\sigma = -5'52{:}47$$
$$(\theta)-(\sigma) = (\pi)-(\chi) = -14{:}61$$

Die Grössen, die nun zur Berechnung von $(u)$ durch den Ausdruck des Art. 144 erforderlich sind, sind ausser den auch hier anzuwendenden, schon oben gegebenen Ausdrücken von $\frac{\Delta c}{1-e\cos\varepsilon}$, den Logarithmen von $(-i''\mu\Delta c)$, $\frac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\cos\varphi\Delta\varphi$ und $\frac{2}{3}\frac{\Delta n}{n}$, die folgenden,

$$-((\nu)-\nu) = -\ (5.934)-2(6.9993)\cos\varepsilon-2(6.9144)\sin\varepsilon$$
$$-C\tfrac{\cos\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon} = \quad (5.364)+2(6.4343)\cos\varepsilon+2(5.064)\cos 2\varepsilon$$
$$-B\tfrac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon} = -2(5.737)\sin\varepsilon-2(4.367)\sin 2\varepsilon$$
$$\tfrac{\cos\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}C\Delta c = +0{:}09+2{:}12\cos\varepsilon+0{:}09\cos 2\varepsilon$$
$$\tfrac{\sin\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}B\Delta c = -0{:}43\sin\varepsilon-0{:}03\sin 2\varepsilon$$
$$\tfrac{\sin\varepsilon\cos\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\cos\varphi\, C\Delta\varphi = \quad 0{:}00\sin\varepsilon-0{:}11\sin 2\varepsilon$$
$$\tfrac{\sin^2\varepsilon}{1-e\cos\varepsilon}\cos\varphi\, B\Delta\varphi = +0{:}02+0{:}00\cos\varepsilon-0{:}02\cos 2\varepsilon$$

und hiemit erhielt ich die folgenden Verbesserungen

Digitized by Google

| | $\frac{(u)}{\cos i} - \frac{u}{\cos i}$ | |
|---|---|---|
| | sin | cos |
| 0,0 | | −2".10 |
| 1,0 | +111".47 | +22.08 |
| 2,0 | +0.26 | −0.16 |
| −1,−1 | −0.04 | +0.10 |
| 0,−1 | 0.00 | 0.00 |
| 1,−1 | −0.15 | +0.09 |
| 2,−1 | −0.20 | +0.02 |
| 0,−2 | 0.00 | 0.00 |
| 1,−2 | −0.24 | −0.22 |
| 2,−2 | −0.20 | −0.15 |
| 3,−2 | +0.03 | +0.05 |
| 0,−3 | −0.19 | −0.21 |
| 1,−3 | −0.06 | −0.03 |
| 2,−3 | +3.44 | −1.67 |
| 3,−3 | +0.49 | +0.09 |

| | $t$ sin | $t$ cos |
|---|---|---|
| 0,0 | | −0".00103 |
| 1,0 | −0".03863 | −0.22811 |
| 2,0 | +0.01932 | −0.02594 |
| 3,0 | +0.00044 | −0.00061 |
| 0,−3 | 0.00000 | 0.00000 |
| 1,−3 | −0.00002 | −0.00005 |
| 2,−3 | −0.00006 | −0.00096 |
| 3,−3 | −0.00115 | −0.00025 |
| 4,−3 | −0.00007 | −0.00004 |

| | $t_1^2$ sin | $t_1^2$ cos |
|---|---|---|
| 0,0 | | +0".023 |
| 1,0 | +0".202 | −0.036 |
| 2,0 | −0.022 | +0.018 |
| 3,0 | −0.005 | −0.002 |

## 149.

Fügen wir nun die eben berechneten Grössen den im Art. 132 erhaltenen Störungen hinzu, so ergeben sich die folgenden, auf die mittleren Elemente sich beziehenden Störungen:

Digitized by Google

| | $n\delta(z)$ | | $(r)$ | | $\frac{(u)}{\cos i}$ | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| | sin | cos | cos | sin | sin | cos |
| 0,0 | | | $-3''.98$<br>$+0.07505t$<br>$+0.557t_1^2$ | | | $+3''.62$<br>$-0.16599t$<br>$+2.144t_1^2$ |
| 1,0 | 0<br>$-1''.70338t$<br>$-10.274t_1^2$ | 0<br>$-4''.69916t$<br>$+2.042t_1^2$ | $+1''.97$<br>$+0.85498t$<br>$+5.166t_1^2$ | $+0''.23$<br>$-2.34931t$<br>$+1.003t_1^2$ | 0<br>$-12''.03334t$<br>$-1.646t_1^2$ | 0<br>$+1.90456t$<br>$-10.715t_1^2$ |
| 2,0 | $-2.31$<br>$+0.03985t$<br>$+0.035t_1^2$ | $+0.72$<br>$+0.10185t$<br>$+0.127t_1^2$ | $+1.78$<br>$-0.00108t$<br>$+0.077t_1^2$ | $-0.49$<br>$-0.00056t$<br>$+0.055t_1^2$ | $-0.26$<br>$-0.00047t$<br>$+0.531t_1^2$ | $-0.37$<br>$-0.00144t$<br>$+1.098t_1^2$ |
| 3,0 | $+0.10$<br>$+0.00004t$<br>$+0.005t_1^2$ | $-0.11$<br>$-0.00001t$<br>$-0.002t_1^2$ | $-0.03$<br>$-0.00010t$<br>$+0.005t_1^2$ | $-0.07$<br>$-0.00047t$<br>$+0.002t_1^2$ | $-0.02$<br>$+0.00012t$<br>$+0.007t_1^2$ | $-0.04$<br>$-0.00047t$<br>$+0.021t_1^2$ |
| −2,−1 | $+0.32$ | $-0.20$ | $+0.21$ | $+0.06$ | $+0.08$ | $+0.04$ |
| −1,−1 | $-3.27$<br>$+0.00256t$ | $+5.98$<br>$+0.00217t$ | $-1.95$<br>$+0.00169t$ | $-3.75$<br>$-0.00143t$ | $+2.08$ | $+3.13$ |
| 0,−1 | $+20.28$<br>$+0.00371t$ | $-12.26$<br>$+0.00254t$ | $+2.24$<br>$+0.00119t$ | $-1.16$<br>$-0.00085t$ | $+10.47$ | $+5.98$ |
| 1,−1 | $+42.09$<br>$-0.00182t$ | $-115.20$<br>$-0.00115t$ | $-14.77$<br>$+0.00075t$ | $-40.36$<br>$-0.00056t$ | $-8.13$ | $-4.97$ |
| 2,−1 | $+0.26$<br>$-0.00215t$ | $+2.49$<br>$-0.00052t$ | $-0.66$<br>$+0.00143t$ | $+0.20$<br>$-0.00032t$ | $-5.28$ | $-0.69$ |
| 3,−1 | $-0.01$ | $-0.77$ | $-0.03$ | $-0.65$ | $+0.45$ | $-0.01$ |
| 4,−1 | $+0.01$ | $+0.04$ | $-0.01$ | $+0.02$ | $+0.02$ | 0.00 |
| −2,−2 | $+0.02$ | $-0.01$ | $+0.02$ | $-0.01$ | $+0.03$ | 0.00 |
| −1,−2 | $-0.24$ | $+0.44$ | $+0.04$ | $-0.58$ | $-0.05$ | $+0.16$ |
| 0,−2 | $+11.20$<br>$+0.00842t$ | $+13.44$<br>$-0.00510t$ | $+5.97$<br>$+0.00327t$ | $-6.56$<br>$+0.00202t$ | $+8.94$ | $-4.48$ |
| 1,−2 | $-174.47$<br>$+0.02581t$ | $-170.21$<br>$-0.01753t$ | $+14.09$<br>$-0.00342t$ | $-40.47$<br>$-0.00211t$ | $-13.09$ | $+11.37$ |
| 2,−2 | $-184.29$<br>$-0.00452t$ | $-140.23$<br>$+0.00616t$ | $+110.14$<br>$+0.00236t$ | $-83.84$<br>$+0.00320t$ | $-5.33$ | $+3.74$ |
| 3,−2 | $+4.04$<br>$-0.00090t$ | $+3.26$<br>$+0.00267t$ | $+0.43$<br>$+0.00039t$ | $+0.08$<br>$+0.00120t$ | $+0.55$ | $-0.85$ |
| 4,−2 | $+0.25$ | $+0.10$ | $-0.24$ | $+0.09$ | $-0.01$ | $+0.03$ |
| −1,−3 | $+0.48$ | $+0.32$ | $+0.01$ | $-0.12$ | $-0.02$ | $+0.06$ |
| 0,−3 | $-18.47$<br>$+0.00351t$ | $-7.93$<br>$+0.00190t$ | $-10.48$<br>$+0.00136t$ | $+4.74$<br>$-0.00141t$ | $-6.68$<br>$+0.00702t$ | $+3.85$<br>$+0.02212t$ |
| 1,−3 | $-611.15$<br>$-0.01829t$ | $-650.53$<br>$-0.57249t$ | $-49.61$<br>$-0.00238t$ | $+21.73$<br>$+0.01692t$ | $+2.64$<br>$-0.01667t$ | $+12.39$<br>$-0.00292t$ |
| 2,−3 | $+746.49$<br>$+0.01627t$ | $+25.91$<br>$+0.06468t$ | $-359.04$<br>$-0.00794t$ | $+12.00$<br>$+0.03164t$ | $-35.25$<br>$-0.00455t$ | $-95.81$<br>$+0.02473t$ |
| 3,−3 | $+2.55$<br>$-0.00344t$ | $-12.82$<br>$-0.01068t$ | $-13.28$<br>$+0.00127t$ | $-9.02$<br>$-0.00380t$ | $-0.20$<br>$-0.02134t$ | $-0.95$<br>$+0.00413t$ |
| 4,−3 | $-0.43$<br>$-0.00015t$ | $+0.11$<br>$+0.00004t$ | $-0.10$<br>$+0.00015t$ | $-0.23$<br>$-0.00017t$ | $+0.20$<br>$-0.00097t$ | $+0.21$<br>$+0.00056t$ |
| 5,−3 | $-0.07$ | $+0.10$ | $+0.06$ | $+0.09$ | | |

Digitized by Google

| | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|
| 0,−4 | −0".23 | −0".15 | −0".20 | +0".08 | −0".20 | −0.04 |
| 1,−4 | −2.56 | +0.64 | −1.22 | 0.00 | +0.36 | +1.17 |
| 2,−4 | +31.33 | −3.08 | −11.29 | −2.49 | −4.10 | −2.91 |
| 3,−4 | +6.37 | −17.04 | −4.58 | −10.88 | −3.20 | +0.17 |
| 4,−4 | +1.09 | +4.97 | −1.03 | +3.59 | +0.25 | +0.05 |
| 5,−4 | +0.08 | −0.03 | −0.10 | +0.11 | −0.09 | +0.05 |
| 6,−4 | −0.03 | −0.04 | +0.03 | −0.04 | | |
| 0,−5 | −0.01 | −0.03 | −0.02 | +0.04 | −0.03 | 0.00 |
| 1,−5 | −0.49 | +0.57 | −0.30 | −0.17 | −0.05 | +0.13 |
| 2,−5 | +18.07 | +4.22 | −2.95 | −0.12 | −0.46 | −0.48 |
| 3,−5 | +1.08 | −13.01 | −0.83 | −7.20 | −3.07 | +2.37 |
| 4,−5 | +2.22 | +2.29 | −1.74 | +1.62 | +0.19 | −0.63 |
| 5,−5 | −1.29 | −0.11 | +1.06 | −0.05 | −0.05 | +0.07 |
| 6,−5 | −0.01 | +0.04 | +0.07 | +0.04 | −0.01 | −0.03 |
| 1,−6 | +0.22 | −0.10 | +0.16 | +0.12 | +0.07 | −0.29 |
| 2,−6 | +19.45 | +2.18 | +1.42 | +0.30 | −0.31 | +0.18 |
| 3,−6 | −4.93 | +12.15 | +2.23 | +5.67 | +1.82 | −2.48 |
| 4,−6 | +2.32 | +0.33 | −1.22 | +0.46 | −0.25 | −0.67 |
| 5,−6 | −0.90 | +0.47 | +0.68 | +0.36 | +0.15 | +0.11 |
| 6,−6 | +0.09 | −0.37 | −0.11 | −0.32 | −0.02 | −0.03 |
| 7,−6 | −0.01 | −0.02 | 0.00 | −0.03 | +0.01 | 0.00 |
| 2,−7 | +0.08 | −0.07 | +0.04 | +0.05 | −0.06 | −0.02 |
| 3,−7 | −0.57 | +1.77 | +0.12 | +0.58 | +0.14 | −0.14 |
| 4,−7 | +0.79 | +0.22 | −0.48 | +0.21 | −0.20 | −0.24 |
| 5,−7 | −0.27 | +0.39 | +0.21 | +0.27 | +0.16 | 0.00 |
| 6,−7 | −0.10 | −0.34 | +0.08 | −0.28 | −0.05 | +0.03 |
| 7,−7 | +0.11 | −0.07 | −0.10 | +0.05 | +0.01 | 0.00 |
| 2,−8 | 0.00 | −0.04 | 0.00 | +0.02 | | |
| 3,−8 | −0.58 | +1.45 | +0.03 | +0.21 | +0.05 | −0.01 |
| 4,−8 | +0.79 | +0.35 | −0.44 | +0.22 | −0.16 | −0.18 |
| 5,−8 | −0.10 | +0.16 | +0.08 | +0.11 | +0.07 | −0.03 |
| 6,−8 | −0.11 | −0.13 | +0.08 | −0.11 | −0.02 | +0.05 |
| 7,−8 | +0.13 | 0.00 | −0.11 | 0.00 | 0.00 | −0.02 |
| 8,−8 | −0.03 | +0.03 | +0.03 | +0.03 | | |
| 3,−9 | −0.45 | +0.57 | −0.02 | −0.06 | | |
| 4,−9 | −0.61 | −0.33 | +0.27 | −0.15 | | |
| 5,−9 | −0.04 | +0.06 | +0.04 | +0.04 | | |
| 6,−9 | −0.04 | −0.01 | +0.03 | −0.02 | | |
| 7,−9 | +0.06 | −0.03 | −0.05 | −0.02 | | |
| 8,−9 | −0.02 | +0.05 | +0.01 | +0.04 | | |
| 4,−10 | −0.11 | −0.08 | +0.03 | −0.02 | | |
| 5,−10 | −0.03 | +0.05 | +0.03 | +0.03 | | |
| 6,−10 | −0.02 | −0.02 | +0.01 | −0.02 | | |
| 7,−10 | +0.02 | −0.02 | −0.02 | −0.01 | | |
| 8,−10 | 0.00 | +0.03 | 0.00 | +0.02 | | |

Hiezu kommen noch die oft erwähnten Saturn- und Marsstörungen, für welche die betreffenden Verbesserungen sehr klein ausfallen würden, so wie die Ausdrücke für $\Gamma$ und $\delta_2 u$, die im Art. 132 gegeben sind. Die Grösse $\Delta\Gamma$ wird völlig unmerklich.

Digitized by Google

Die mittleren Elemente sind nun der vorstehenden Berechnung zufolge die folgenden. Für 1851 Dec. 5. 0 m. Z. Gr. ist

$$\text{die mittlere Anomalie} = 18^\circ\ 32'\ 47''.6 + 857''.9364\,(t.365.25) - 0''.426\,t_1^2$$

$$\left.\begin{aligned}(\pi) &= 120^\circ\ 11'\ 46''.2\\ (\theta) &= 43\ 10\ 54.3\end{aligned}\right\}\ \text{m. Aeq. für } 1851.0$$

$$(\varphi) = 4\ 59\ 47.3$$

$$(i) = 16\ 32\ 23.3$$

$$\log(a) = 0.4110343$$

Es versteht sich von selbst, dass nicht erwartet werden darf, dass die Vergleichung der aus diesen Elementen und den dazu gehörigen Störungen hervorgehenden Oerter der Egeria mit den Beobachtungen nicht diesem Elemente noch kleine Correctionen hinzufügen sollte. Das in dem Ausdruck der mittleren Anomalie enthaltene Element ($c$) wird ausserdem durch Vergleichung mit den Beobachtungen aus dem Grunde eine Verbesserung erhalten, dass in den vorstehenden Rechnungen die vom Mars herrührende Ungleichheit langer Periode übergangen worden ist; auf die übrigen Elemente hat dieser Umstand keine Wirkung.

## 150.

Es kann interessant sein zu untersuchen, wie viel man in der Bestimmung der mittleren Elemente gefehlt haben würde, wenn man sie zwar nach den hier entwickelten Formeln, aber mit Anwendung der Coefficienten, die die erste Annäherung gegeben hat, berechnet hätte. Aus dem Art. 61 (II) entnehme ich daher die folgenden Werthe

$$a_1 = +808''.60\ ;\quad b_1 = -664''.63$$

$$h = -110.27\ ;\quad k = -\ 22.27$$

und hiemit erhielt ich durch die Ausdrücke der Artt. 145 und 146

$$\Delta\varphi = +\ 6'\ 47''.4$$

$$\Delta\chi = +\ 1^\circ\ 3'\ 20.6$$

$$\Delta c = -\ 1\ 3\ 48.2$$

$$\Delta i = \quad -\ 48.5$$

$$\Delta\sigma = \quad -\ 5\ 41.8$$

Digitized by Google

Vergleicht man diese mit den obigen Werthen derselben Correctionen, so ergiebt sich, dass die vollständige Berücksichtigung der Grössen zweiter Ordnung den mittleren Elementen die folgenden Grössen hinzugefügt hat,

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &\ldots\ +6''.2 \\ \Delta\chi &\ldots +1'\ 14''.5 \\ \Delta c &\ldots -1\ \ 15.9 \\ \Delta i &\ldots\ -0.1 \\ \Delta\sigma &\ldots\ -10.7 \end{aligned}$$

Dass die Glieder zweiter Ordnung dem wahren (oder mittleren) Werthe der mittleren täglichen Bewegung

$$-0''.0149$$

hinzugefügt hat, geht aus dem Art. 93 hervor. Lässt man bei dieser Rechnung auch in den Ausdrücken des Art. 145 die Glieder zweiter Ordnung weg, so findet man

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &= +6'\ 44''.3 \\ \Delta\chi &= +1^0\ 4\ \ 51.0 \\ \Delta c &= -1\ \ 5\ \ 19.3 \end{aligned}$$

und die Unterschiede dieser mit den genauen Werthen sind

$$\begin{aligned} \Delta\varphi &\ldots +\ 9''.3 \\ \Delta\chi &\ldots -15.9 \\ \Delta c &\ldots +15.2 \end{aligned}$$

Der Unterschied in $\Delta\varphi$ ist hier grösser, aber die Unterschiede in $\Delta\chi$ und $\Delta c$ sind kleiner geworden. Dieses halte ich indess nur für zufällig.

Digitized by Google

Digitized by Google

O. SCHLÖMILCH, über die Bestimmung der Massen und der Trägheitsmomente symmetrischer Rotationskörper von ungleichförmiger Dichtigkeit. 1854. 8 Ngr.

———— Ueber einige allgemeine Reihenentwickelungen und deren Anwendung auf die elliptischen Functionen. 1854. 16 Ngr.

P. A. HANSEN, die Theorie des Aequatoreals. 1855. 24 Ngr.

C. F. NAUMANN, über die Rationalität der Tangenten-Verhältnisse tautozonaler Krystallflächen. 1855. 10 Ngr.

A. F. MÖBIUS, Die Theorie der Kreisverwandtschaft in rein geometrischer Darstellung. 1855. 20 Ngr.

**FÜNFTER BAND**: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Dritter Band. Mit 15 Tafeln. hoch 4. 1857. br. Preis 6 Thlr. 12 Ngr.

Inhalt:

M. W. DROBISCH, Nachträge zur Theorie der musik. Tonverhältnisse. 1855. 12 Ngr.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. 1856. 1 Thlr. 20 Ngr.

R. KOHLRAUSCH und W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen insbesondere Zurückführung der Stromintensitäts-Messungen auf mechanisches Maass. 1856. 16 Ngr.

H. D'ARREST, Resultate aus Beobachtungen der Nebelflecken und Sternhaufen. Erste Reihe. 1856. 24 Ngr.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Erste Abhandlung: über die Messung der atmosphärischen Elektricität nach absolutem Maasse. Mit 2 Tafeln. 1856. 2 Thlr.

W. HOFMEISTER, Beiträge zur Kenntniss der Gefässkryptogamen. No. II. Mit 13 Tafeln. 1857. 1 Thlr. 10 Ngr.

**SECHSTER BAND**: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Vierter Band. Mit 29 Tafeln. hoch 4. 1859. Preis 7 Thlr. 15 Ngr.

Inhalt:

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Zweite Abhandlung. 1857. 1 Thlr. 10 Ngr.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Zweite Abhandlung: über die thermoelektrischen Eigenschaften des Boracites. 1857. 24 Ngr.

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Dritte Abhandlung: über Elektricitätserregung zwischen Metallen und erhitzten Salzen. 1858. 16 Ngr.

P. A. HANSEN, Theorie der Sonnenfinsternisse und verwandten Erscheinungen. Mit 2 Tafeln. 1858. 2 Thlr.

G. T. FECHNER, Über ein wichtiges psychophysisches Grundgesetz und dessen Beziehung zur Schätzung der Sterngrössen. 1858. 20 Ngr.

W. HOFMEISTER, Neue Beiträge zur Kenntniss der Embryobildung der Phanerogamen. I. Dikotyledonen mit ursprünglich einzelligem, nur durch Zellentheilung wachsendem Endosperm. Mit 27 Tafeln. 1859. 2 Thlr. 20 Ngr.

**SIEBENTER BAND**: Abhandlungen der mathematisch-physischen Classe. Fünfter Band.

Hiervon ist bis jetzt erschienen:

W. G. HANKEL, Elektrische Untersuchungen. Vierte Abhandlung: über das Verhalten der Weingeistflamme in elektrischer Beziehung. 1859. 20 Ngr.

P. A. HANSEN, Auseinandersetzung einer zweckmässigen Methode zur Berechnung der absoluten Störungen der kleinen Planeten. Dritte Abhandlung. 1859. 2 Thlr. 12 Ngr.

---

# SITZUNGSBERICHTE.

## KLEINERE ABHANDLUNGEN.

**BERICHTE** über die Verhandlungen der königlich sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften zu Leipzig. Erster Band. Aus den Jahren 1846 und 1847. Mit Kupfern. gr. 8. 12 Hefte.

—— Zweiter Band. Aus dem Jahre 1848. Mit Kupfern. gr. 8. 6 Hefte.

Vom Jahre 1849 an sind die Berichte der beiden Classen getrennt erschienen.

—— Mathematisch-physische Classe. 1849 (3) 1850 (3) 1851 (2) 1852 (2) 1853 (3) 1854 (3) 1855 (2) 1856 (2) 1857 (3) 1858 (3). 1859. 1, 2.

—— Philologisch-historische Classe. 1849 (5) 1850 (4) 1851 (5) 1852 (4) 1853 (5) 1854 (6) 1855 (4) 1856 (4) 1857 (2) 1858 (2).

Jedes Heft der Berichte ist einzeln zu dem Preise von 10 Ngr. zu haben.

Aus den Berichten besonders abgedruckt:

Das Edict Diocletians de pretiis rerum venalium. Herausgegeben von *Th. Mommsen*. Mit Nachträgen. 1852. 14 Ngr.

M. Valerius Probus de notis antiquis. Herausgegeben von *Th. Mommsen*. 1853. 10 Ngr.

W. ROSCHER, ein nationalökonomisches Hauptprincip der Forstwissenschaft. 1854. 6 Ngr.

*Leipzig, October* 1859. **S. Hirzel.**

# SCHRIFTEN

DER

## FÜRSTLICH-JABLONOWSKISCHEN GESELLSCHAFT

ZU LEIPZIG.

---

**ABHANDLUNGEN** bei Begründung der Königl. Sächsischen Gesellschaft der Wissenschaften am Tage der zweihundertjährigen Geburtsfeier Leibnizens herausgegeben von der Fürstl. Jablonowskischen Gesellschaft. Mit dem Bildnisse von Leibniz in Medaillon und zahlreichen Holzschnitten und Kupfertafeln. 61 Bogen in hoch 4. 1846. broch. Preis 5 Thlr.

Inhalt:

W. WACHSMUTH, Briefe von Leibniz an Christian Philipp. (Einzeln 16 Ngr.)

A. F. MÖBIUS, Ueber eine neue Behandlungsweise der analytischen Sphärik. Mit einer Tafel. (Einzeln 16 Ngr.)

M. W. DROBISCH, Ueber die mathematische Bestimmung der musikalischen Intervalle. (Einzeln 12½ Ngr.)

A. SEEBECK, Ueber die Schwingungen der Saiten. (Einzeln 10 Ngr.)

C. F. NAUMANN, Ueber die Spiralen der Couchylien. (Einzeln 16 Ngr.)

F. REICH, Elektrische Versuche. (Einzeln 7½ Ngr.)

W. WEBER, Elektrodynamische Maassbestimmungen. Mit Holzschnitten. (Einzeln 1 Thlr.)

E. H. WEBER, Zusätze zur Lehre vom Baue und den Verrichtungen der Geschlechtsorgane. Mit 9 Kupfertafeln. (Einzeln 1 Thlr. 10 Ngr.)

C. G. LEHMANN, Beiträge zur Kenntniss des Verhaltens der Kohlensäureexhalation unter verschiedenen physiologischen und pathologischen Verhältnissen. (Einzeln 10 Ngr.)

**PREISSCHRIFTEN** gekrönt und herausgegeben von der Fürstlich Jablonowskischen Gesellschaft.

1. H. GRASSMANN, Geometrische Analyse geknüpft an die von Leibniz erfundene geometrische Characteristik. Mit einer erläuternden Abhandlung von *A. F. Möbius*. hoch 4. 1847. 20 Ngr.

2. H. B. GEINITZ, das Quadergebirge oder die Kreideformation in Sachsen, mit Berücksichtigung der glaukonitreichen Schichten. Mit 1 color. Tafel. hoch 4. 1850. 16 Ngr.

3. J. ZECH, Astronomische Untersuchungen über die Mondfinsternisse des Almagest. hoch 4. 1851. 10 Ngr.

4. J. ZECH, Astronomische Untersuchungen über die wichtigeren Finsternisse, welche von den Schriftstellern des classischen Alterthums erwähnt werden. hoch 4. 1853. 20 Ngr.

5. H. B. GEINITZ, Darstellung der Flora des Hainichen-Ebersdorfer und des Flöhaer Kohlenbassins. hoch 4. Mit 14 Kupfertafeln in gr. Folio. 1854. 8 Thlr.

6. TH. HIRSCH, Danzigs Handels- und Gewerbsgeschichte unter der Herrschaft des deutschen Ordens. hoch 4. 1858. 2 Thlr. 20 Ngr.

---

CHR. AD. PESCHECK, die Böhmischen Exulanten in Sachsen. hoch 4. 1857. 1 Thlr. 10 Ngr.

*Leipzig.* **S. Hirzel.**

---

Ferner ist bei mir erschienen:

WIETERSHEIM, E. von, Gedächtnissrede auf Seine Majestät Friedrich August, König von Sachsen, gehalten in der öffentlichen Sitzung der Königl. Sächs. Gesellschaft der Wissenschaften am 27. Oct. 1854. hoch 4. broch. 10 Ngr.

**S. Hirzel.**

Druck von Breitkopf und Härtel in Leipzig.

Digitized by Google

Digitized by Google

Digitized by Google

This book should be returned to the Library on or before the last date stamped below.

A fine is incurred by retaining it beyond the specified time.

Please return promptly.

Digitized by Google